



Universidad
Politécnica
de Cartagena



PROGRAMA DE DOCTORADO EN TECNOLOGÍA Y MODELIZACIÓN EN
INGENIERÍA CIVIL, MINERA Y AMBIENTAL

TESIS DOCTORAL

ESTUDIO DEL FLUJO DE AGUA SUBTERRÁNEA A PARTIR DE DATOS DE
TEMPERATURA MEDIANTE MÉTODOS INVERSOS. APLICACIONES A
ESCENARIOS HIDROGEOLÓGICOS DEL ENTORNO DEL MAR MENOR

Presentada por José Antonio Jiménez Valera
para optar al grado de Doctor
por la Universidad Politécnica de Cartagena

Dirigida por:

Dr. Francisco Alhama López

Cartagena, 2022

**DOCTORAL PROGRAMME IN TECHNOLOGY AND MODELING IN CIVIL, MINING
AND ENVIRONMENTAL ENGINEERING**

PhD THESIS

**STUDY OF GROUNDWATER FLOW FROM TEMPERATURE DATA USING
INVERSE METHODS. APPLICATIONS TO HYDROGEOLOGICAL
SCENARIOS AROUND MAR MENOR LAGOON**

Presented by JOSÉ ANTONIO JIMÉNEZ VALERA
to the Technical University of Cartagena in fulfillment of
the thesis requirement for the award of PhD

Supervisor:

Dr. Francisco Alhama López

Cartagena, 2022

Agradecimientos

A la Fundación Séneca, por darme la oportunidad de realizar mi tesis doctoral, de trabajar en la como Investigador Predoctoral en Formación y de impartir docencia en la Universidad Politécnica de Cartagena.

A mi director de tesis, el Catedrático Francisco Alhama, por ofrecerme hacer la tesis doctoral bajo su dirección y por su dedicación y trabajo.

A Carlos Duque por haber sido mi tutor durante mi estancia internacional en la Universidad de Aarhus y por toda su ayuda.

A Gonzalo García e Iván Alhama por permitirme ser profesor del Área de Ingeniería del Terreno del Departamento de Ingeniería Minera y Civil.

A las personas que siempre han estado ahí apoyándome.

A mis padres. Sin ellos nada hubiera sido posible.

ÍNDICE

Nomenclatura general.....	9
Resumen	11
Abstract	15
Objetivos.....	19
Objectives	23
Capítulo 1. Introducción	27
1.1 Presentación e introducción	27
1.2 Metodología	27
1.3 Perspectivas	27
1.4 Estancia internacional	27
1.1 Presentación e introducción	28
1.2 Metodología	29
1.3 Perspectivas	30
1.4 Estancia internacional	30
Capítulo 2. Estado del arte	33
2.1 Introducción al estado del arte	34
2.2 Modelos 1D	38
2.3 Caso de flujos horizontales	42
2.4 Modelos 2D y 3D	43
2.5 Grupos adimensionales y otros temas relacionados con el “análisis dimensional” ...	44
2.6 Sobre las soluciones analíticas y numéricas.....	47
2.7 Sobre las condiciones de contorno y el tipo de transporte	49
2.8 En relación con aspectos más específicos.....	50
Capítulo 3. Fundamentos teóricos, modelos en red y escenarios	53
3.1 Modelo matemático. El problema directo	54

3.2	Caracterización dimensional	55
3.3	Método de simulación por redes	59
3.4	Escenarios.....	65
3.5	Planteamiento del problema inverso.....	88
Capítulo 4. Caracterización de los escenarios. Grupos adimensionales y curvas universales		91
4.1	Primera aplicación. Flujo vertical	93
4.2	Segunda aplicación. Flujo horizontal superficial	115
4.3	Tercera aplicación. Flujo horizontal con capa permeable sumergida.....	138
4.4	Cuarta aplicación. Flujo oblicuo	151
4.5	Quinta aplicación. Interacción río-acuífero.....	169
Capítulo 5. Modelos de problema inverso y sus soluciones		185
5.1	Escenario de flujo vertical	186
5.2	Segunda aplicación. Flujo horizontal.....	205
5.3	Tercera aplicación. Flujo horizontal con capa permeable sumergida.....	211
5.4	Cuarta aplicación. Flujo oblicuo	217
5.5	Quinta aplicación. Interacción río-acuífero.....	230
Capítulo 6. Aplicación en el entorno del Mar Menor		237
6.1	Introducción	238
6.2	Descripción del área de estudio	241
6.3	Aplicación de protocolo de problema inverso	244
Conclusiones		255
Conclusions		263
Referencias bibliográficas.....		269

Nomenclatura general

a, b	parámetros solución analítica Suzuki [1960]
c	capacidad calorífica volumétrica ($\text{cal}/(\text{m}^3\text{°C})$)
f	denota una función matemática
h	potencial hidráulico (m)
H	profundidad total del acuífero (m)
k	conductividad térmica ($\text{cal}/(\text{sm}^{\circ}\text{C})$)
k_m	conductividad térmica de la matriz agua-terreno ($\text{cal}/(\text{sm}^{\circ}\text{C})$)
K	conductividad hidráulica (m/s)
K_{Stallman}	constante de la solución de Stallman [1965] en (cm^{-2})
l	longitud (m)
l*	longitud característica (m)
L	longitud horizontal del dominio (m)
L_x	longitud asociada a la dirección espacial x (m)
L_y	longitud asociada a la dirección espacial y (m)
P_e	número de Peclet (adimensional)
P_{e,modificado}	número de Peclet modificado (adimensional)
P_r	número de Prandtl (adimensional)
R_e	número de Reynolds (adimensional)
T	temperatura ($^{\circ}\text{C}$)
T_m	temperatura media ($^{\circ}\text{C}$)
(T - y)	perfiles verticales de temperatura
(T' - z')_{perfil}	perfiles verticales adimensionales de temperatura
t	tiempo (s)

Nomenclatura general

\mathbf{v}, \vec{v}	vector velocidad de flujo de agua subterránea (m/s)
V	constante de la solución de Stallman [1965] (cm^{-1})
x, y, z	coordenadas espaciales (m)
α	difusividad térmica (m^2/s), $\alpha = k / \rho_e c_e$
β	parámetro adimensional utilizado en las soluciones de Bredehoeft y Papadopulos [1965] y de Taniguchi [1993]
ΔT	amplitud de la onda sinusoidal
∇	gradiente
μ	viscosidad dinámica (Pa·s)
π	grupo adimensional
ρ	densidad aparente (kg/m^3)
Ψ	función matemática
$\ $	valor absoluto
$[]$	denota intervalo
$\{ \}$	símbolo que encierra la dimensión de una cantidad
\diamond	símbolo que encierra la lista de los parámetros relevantes de un problema
\in	contenido en
\sim	denota orden de magnitud
$'$	denota carácter adimensional

Subíndices

$(\cdot)_e$	relativo a la matriz agua-terreno
$(\cdot)_{e,w}$	relativo al agua del terreno
$(\cdot)_T$	relativo a la temperatura
$(\cdot)_{x,y,z}$	relativo a los ejes x, y, z
$(\cdot)_{z=0}$	relativo a la superficie del terreno
$(\cdot)_{1,2,3\dots}$	denota diferentes grupos adimensionales o diferentes funciones matemáticas
$(\cdot)_{I,II \dots}$	denota grupo adimensional

Resumen

Los objetivos principales de este trabajo son la caracterización adimensional de escenarios, la obtención de soluciones universales, así como su representación gráfica, y la propuesta de protocolos de problema inverso para la estimación tanto del caudal de agua subterránea como de las propiedades térmicas y geométricos del medio poroso. La aplicación de los resultados obtenidos al escenario del Mar Menor quedó como un objetivo añadido debido a la gran cantidad de escenarios caracterizados. Los distintos casos estudiados han sido: i) escenario de flujo vertical unidimensional (ascendente y descendente), ii) flujo horizontal en acuíferos saturados, iii) flujo horizontal a través de una capa permeable situada entre dos regiones impermeables, iv) flujo oblicuo de velocidad constante, v) escenarios en los cuales los potenciales hidráulicos son constantes en las fronteras del dominio y, vi) interacción río acuífero.

La técnica utilizada para obtención de soluciones universales ha sido la adimensionalización discriminada y normalizada del modelo matemático del problema. Para ello, el primer paso, es la correcta definición de las ecuaciones de gobierno del problema y de sus condiciones térmica e hidráulicas de contorno, más las posibles condiciones iniciales. El siguiente paso es la definición de las variables adimensionales en forma normalizada y la sustitución de las mismas en las ecuaciones de gobierno para obtener los grupos adimensionales (de significado físico claro merced al propio protocolo de determinación de los grupos) que rigen las soluciones del problema. Aplicando el teorema de pi, se obtienen finalmente las soluciones universales que deben ser verificadas por medio de simulaciones numéricas para, posteriormente, construir

representaciones gráficas universales en forma de curvas, ábacos y/o superficies universales que pueden ser usadas tanto para obtener la solución de problemas concretos como para la presentación de protocolos de problema inverso.

Para la verificación de las soluciones se han utilizado MODFLOW y MT3DMS, ya muy introducidos en la comunidad científica, pero, la representación de las soluciones universales se ha realizado a partir de modelos en red simulados en Ngspice (software libre) o Pspice. El método de simulación por redes, como herramienta para el diseño de los modelos en red, posibilita el estudio de cualquier proceso que pueda definirse mediante un conjunto de ecuaciones que formen un modelo matemático. Está compuesto de dos fases: la elaboración de un modelo en red o circuito eléctrico equivalente y la simulación del proceso por medio de un programa adecuado para la resolución de circuitos eléctricos.

Para el escenario de flujo vertical 1D, se ha introducido una longitud característica (magnitud oculta en el enunciado del problema) denominada $l_{\text{dif-adv}}^*$ para la cual los efectos de conducción y advección son comparables durante el tiempo $\tau_{\text{dif-adv}}^*$, que también es una magnitud oculta.

Para la condición de temperatura constante en la superficie del terreno la solución analítica de Bredehoeft y Papadopulos [1965] ha sido corregida y, además, se aporta una solución para el transitorio, así como su representación gráfica universal. Se ha demostrado que estas soluciones son aplicables tanto para el caso de temperatura armónica en superficie (siempre que se refieran a la temperatura media del ciclo) como para el caso de temperatura constante en la superficie.

Para la condición de variación sinusoidal de la temperatura en la superficie del terreno se aporta, por primera vez en la literatura científica, la distinción entre acuíferos profundos y acuíferos superficiales desde el punto de vista térmico. Para ello, es necesario introducir una longitud (o profundidad) característica vertical que define la extensión del acuífero donde la onda armónica de temperatura es aún apreciable.

La aplicación más directa de los resultados obtenidos es su uso para la estimación de flujos (velocidades) y/o propiedades térmicas y geométricas del acuífero en la forma de problema inverso.

En el segundo escenario estudiado (flujo horizontal en acuíferos saturados), la aparición de una longitud característica horizontal, cuya expresión adimensional depende de los grupos adimensionales que rigen la solución del problema, permite caracterizar los perfiles temperatura-profundidad dentro de la región delimitada por dicha longitud característica. Estos

perfiles dependen de la posición relativa respecto a dicha longitud. Una de las contribuciones más relevantes es la referente a la demostración de que los gradientes térmicos horizontales en ningún caso son constantes, como se asume por hipótesis en los trabajos científicos para estos escenarios. Estos gradientes son, en realidad, muy cambiantes en una determinada longitud, hasta llegar a tener un valor nulo. Con base a los resultados obtenidos, particularmente en el hecho de que los perfiles de temperatura estacionario solo dependen de la posición relativa dentro de la región característica horizontal, se propone un protocolo de problema inverso clásico mediante simulaciones numéricas.

Respecto al problema de flujo de agua horizontal a través de una capa permeable, al igual que ocurría en el escenario anterior, la introducción por un lado de una longitud característica horizontal, a lo largo de la cual se desarrollan los perfiles verticales de temperatura, y por otro de un tiempo característico que marca la duración del período transitorio, permiten la estimación, de forma directa, de las dependencias de las formas adimensionales de estas dos incógnitas sobre el resto de grupos del problema. Se establecen dos protocolos de problema inverso para la estimación de la velocidad horizontal del flujo de agua subterránea, uno a partir de medidas de temperatura en el estado estacionario y otro a partir de medidas en el transitorio.

Para el escenario de flujo oblicuo de velocidad constante, existe una región característica en la cual los perfiles de temperatura dependen de las componentes vertical y horizontal de la velocidad del flujo. Más allá de esta región, los perfiles verticales de temperatura únicamente dependen de la componente vertical y son independientes de la posición horizontal. Para el escenario de flujo oblicuo de potenciales hidráulicos de valor constante, la velocidad de flujo no es constante en cada punto del medio poroso, sino que se va desarrollando gradualmente dentro de una región más allá de la cual, el flujo horizontal se hace nulo. En escenarios de flujo constante se presenta un protocolo de problema inverso que hace uso de las soluciones universales combinada con simulaciones numéricas para la estimación las componentes vertical y horizontal, respectivamente.

Finalmente, para el escenario de interacción río-acuífero, el flujo no es constante a lo largo de una región horizontal a lo largo de la cual la componente vertical irá perdiendo importancia frente a la horizontal. Más allá de esta región definida a partir de una longitud característica hidráulica, la velocidad vertical es despreciable. En este escenario, se puede desacoplar el problema hidráulico del problema térmico. Por lo tanto, el caudal adimensional, los potenciales hidráulicos adimensionales y el valor de la longitud característica horizontal hidráulica, sólo dependen de la geometría del escenario, de las componentes de la permeabilidad y del valor de los potenciales hidráulicos en la frontera. Sin embargo, los patrones de temperatura, además de

Resumen

dependen de las condiciones térmicas y mecánicas en los contornos, dependerán de las propiedades térmicas e hidráulicas del medio, de la geometría y de la posición.

Por último, el protocolo de problema inverso clásico propuesto para el caso de flujo horizontal ha sido aplicado en una zona del entorno del Mar Menor situada en Los Alcázares, estimándose la velocidad horizontal y la temperatura de entrada del agua subterránea.

Abstract

The main objectives of this work are the dimensionless characterization of different scenarios, the obtaining of universal solutions, as well as their graphical representation, and the proposal of inverse problem protocols for the estimation of the groundwater flow and the thermal and geometric properties of the porous media. The application of results obtained to the Mar Menor scenario remained an added objective due to the large number of characterized scenarios. The different cases studied have been: i) one-dimensional vertical flow scenario (upward and downward), ii) horizontal flow in saturated aquifers, iii) horizontal flow through a permeable layer located between two impermeable regions, iv) oblique flow of constant velocity, v) scenarios in which hydraulic potentials are constant at the boundaries of the domain and, vi) river-aquifer interaction scenario.

The technique used to obtain universal solutions has been the discriminated and normalized non-dimensionalization of the mathematical model of the problem. For this, the first step is the proper definition of the governing equations of the problem and its thermal and hydraulic boundary conditions, plus the initial conditions. The next step is the definition of the dimensionless variables in normalized form and their substitution in the governing equations to obtain the dimensionless groups (of clear physical meaning thanks to the group determination protocol itself) that govern the solutions of the problem. Applying the pi theorem, universal solutions are finally obtained that must be verified by means of numerical simulations to subsequently build universal graphic representations in the form of curves, abacus and/or

Abstract

universal surfaces that can be used both to obtain the solution of real problems and for the presentation of inverse problem protocols.

For the verification of the solutions obtained, MODFLOW and MT3DMS have been used, already widely introduced in the scientific community, but representation of the universal solutions has been made from network models simulated in Ngspice (free software) or Pspice. The network simulation method, as a tool for the design of network models, enables the study of any process that can be defined by a set of equations that form a mathematical model. It consists of two phases: the elaboration of a network model or equivalent electrical circuit and the simulation of the process by means of a suitable program for resolution of electrical circuits.

For 1D vertical flow scenario, a characteristic length (hidden magnitude in the problem statement) called $l_{\text{dif-adv}}^*$ has been introduced for which conduction and advection effects are comparable during time $\tau_{\text{dif-adv}}^*$, which is also a hidden magnitude.

For constant temperature condition at the ground surface, the analytical solution of Bredehoeft and Papadopoulos [1965] has been corrected and, in addition, a solution for the transient is provided, as well as its universal graphical representation. It has been shown that these solutions are applicable both for the case of harmonic surface temperature (as long as they refer to the mean temperature of the cycle) and for the case of constant surface temperature.

For sinusoidal temperature variation on the ground surface, a distinction between deep and shallow aquifers from a thermal point of view is provided for the first time in the scientific literature. To do this, it is necessary to introduce a characteristic vertical length (or depth) that defines the extent of the aquifer where the temperature harmonic wave is still appreciable.

The most direct application of the results obtained is their use for the estimation of groundwater flows (velocities) and/or thermal and geometric properties of the aquifer in the form of an inverse problem.

In the second scenario (horizontal flow in saturated aquifers), the appearance of a characteristic horizontal length, whose dimensionless expression depends on the dimensionless groups that govern the solution of the problem, allows characterizing temperature-depth profiles within the region delimited by that characteristic length. These profiles depend on the relative position with respect to said length. One of the most relevant contributions is the one referring to the demonstration that the horizontal thermal gradients are in no case constant, as assumed by hypothesis in the scientific works for these scenarios. These gradients are, in fact, very changeable in a certain length, until reaching a null value. Based on the results obtained, particularly on the fact that the steady-state temperature profiles only depend on the relative

Abstract

position within the horizontal characteristic region, a classical inverse problem protocol is proposed by means of numerical simulations.

Regarding the problem of horizontal water flow through a permeable layer, as in the previous scenario, the introduction, on the one hand, of a characteristic horizontal length, along which the vertical temperature profiles develop, and on the other a characteristic time that marks the duration of the transitory period, allow the estimation, directly, of the dependencies of the dimensionless forms of these two unknowns on the rest of the problem groups. Two inverse problem protocols are established for estimating the horizontal groundwater velocity, one based on temperature measurements in the steady-state and the other based on transient measurements.

For the constant velocity oblique flow scenario, there is a characteristic region in which the temperature profiles depend on the vertical and horizontal components of the flow. Beyond this region, the vertical temperature profiles depend only on the vertical component and are independent of the horizontal position. For the scenario of oblique flow of hydraulic potentials of constant value at the boundaries, the flow velocity is not constant at each point of the porous media but gradually develops within a region beyond which the horizontal flow becomes null. In constant flow scenarios, an inverse problem protocol is presented that makes use of universal solutions combined with numerical simulations to estimate the vertical and horizontal components, respectively.

For the river-aquifer interaction scenario, the flow is not constant along a horizontal region along which the vertical component will lose importance compared to the horizontal. Beyond this region defined from a hydraulic characteristic length, the vertical velocity is negligible. In this scenario, the hydraulic problem can be decoupled from the thermal problem. Therefore, dimensionless flow, dimensionless hydraulic potentials and the value of the hydraulic horizontal characteristic length only depend on the geometry of the scenario, the permeability components and the value of the hydraulic potentials at the boundary. However, the temperature patterns, in addition to depending on the thermal and mechanical conditions at the boundaries, will depend on the thermal and hydraulic properties of the aquifer, geometry and position.

Finally, the classic inverse problem protocol proposed for the case of horizontal flow has been applied in an area around Mar Menor located in Los Alcázares, estimating the horizontal velocity and the groundwater inlet temperature.

Objetivos

Al comienzo de la investigación, se planteó un objetivo muy concreto: el estudio del flujo de agua subterránea en el medio poroso y la estimación de los caudales de vertido desde el acuífero del Campo de Cartagena hacia la laguna salada del Mar Menor partiendo de medidas de perfiles de temperatura del agua subterránea en diferentes puntos del acuífero. Un problema inverso que, si bien estudiado desde hace décadas principalmente para flujos verticales (que incluyen soluciones analíticas), la mayor parte de la literatura científica se enfoca al estudio de escenarios particulares (estudio de casos) que, por su complejidad, suelen abordarse numéricamente. Al investigar el estado de arte y descubrir los diferentes escenarios básicos que se presentan en el campo, y también para dar mayor profundidad al trabajo, reorientamos el objetivo inicial al de la caracterización adimensional de escenarios, sus posibles soluciones universales y los modelos de problema inverso de mayor interés en este campo de la ingeniería. Sin duda un objetivo mucho más ambicioso y general. La aplicación de estos resultados al escenario de Mar Menor quedó como un objetivo añadido.

Con todo, los objetivos de la presente memoria pueden desglosarse de la siguiente forma:

- 1) Revisión exhaustiva del estado del arte en relación con los problemas acoplados de transporte de calor y flujo en medios porosos, especialmente en suelos, bajo diferentes condiciones térmicas de contorno (incluyendo las armónicas de tipo sinusoidal) en su superficie, y flujos de agua horizontales, verticales y oblicuos. La revisión se centra en la influencia de los parámetros

Objetivos

físicos (incluyendo el caudal) y geométricos en los perfiles verticales de temperatura en profundidad.

2) Realización de un estudio alternativo de carácter teórico del flujo vertical (tanto ascendente como descendente), así como del flujo horizontal y oblicuo utilizando técnicas de adimensionalización para caracterizar el flujo de agua subterránea a partir de la obtención precisa de los grupos adimensionales que rigen la solución o soluciones del problema. Estos grupos dependen de la geometría del escenario, de los parámetros térmicos del subsuelo, incluso de las condiciones de contorno (térmicas e hidráulicas). Para ello será necesario llevar a cabo simulaciones numéricas precisas a partir de los modelos en red diseñados para estos escenarios físicos.

3) Aplicación de los anteriores resultados al escenario de aporte de agua al Mar Menor en su localización de Los Alcázares (Cartagena, Región de Murcia, Sureste de España). Para ello se llevará a cabo una recopilación y análisis de datos de campo tomados en forma discreta o en continuo: alturas piezométricas, temperaturas del agua a distintas profundidades (mediante ibuttons) y variación de la temperatura en la superficie del terreno.

4) Recopilación y estudio de las propiedades térmicas del subsuelo: conductividades térmicas, calores específicos de la matriz agua-terreno y difusividad térmica. Conocer el valor de la difusividad térmica del suelo es de vital importancia para tener una buena aproximación de la inercia térmica del terreno ante los cambios de la temperatura en la superficie.

5) Desarrollo de códigos numéricos específicos basados en el método de simulación por redes (MESIR) para la resolución del problema directo de la distribución de temperaturas en el subsuelo, asumiendo velocidades de entrada del agua subterránea o condiciones de potencial hidráulico constante en los contornos. Los modelos en red son generados para: i) flujos en los cuales la velocidad tiene únicamente componente vertical u horizontal, ii) flujos oblicuos y, iii) escenarios de interacción río-acuífero. Se han generado tanto modelos en red, simulados mediante el código libre Ngspice (en combinación con MATLAB), como modelos específicos para MODFLOW en combinación con MT3MDS.

6) Puesta a punto y verificación de los códigos numéricos desarrollados mediante simulaciones de casos reales o por comparación con casos ya conocidos y testados en la literatura científica.

7) Elaboración, para cada uno de los problemas, de curvas, ábacos y superficies universales que permitan la representación más precisa y útil de las soluciones obtenidas a partir de la adimensionalización de los modelos matemáticos.

Objetivos

8) Desarrollo de metodologías de adquisición de datos para la estimación del caudal (o de la velocidad) y del flujo de agua subterránea a partir de los parámetros geométricos y físicos del acuífero y del registro de perfiles de temperatura en campo, estableciendo para ello protocolos adecuados de problema inverso. Tales protocolos hacen uso de las representaciones universales mencionadas en el punto anterior y requieren nuevas simulaciones numéricas.

9) Aplicación del protocolo a la determinación de caudales subterráneos en el escenario citado del Mar Menor.

Objectives

At the beginning of the investigation, a very specific objective was set: the study of groundwater flow in porous media and the estimation of discharge flows from the “Campo de Cartagena” aquifer to the Mar Menor saltwater lagoon based on groundwater temperature profiles measurements at different points in the aquifer. An inverse problem that, although studied for decades mainly for vertical flows (which include analytical solutions), most of the scientific literature focuses on the study of particular scenarios that, due to their complexity, are usually approached numerically. By investigating the state of the art and discovering the different basic scenarios that arise, and also to give greater depth to the work, the initial objective was redirected to the dimensionless characterization of scenarios, their possible universal solutions and inverse problem protocols of greatest interest in this field of engineering. Without a doubt, a much more ambitious and general objective. The application of these results to the Mar Menor scenario remained an added objective.

Therefore, the objectives of this report can be broken down as follows:

- 1) Exhaustive review of the state of the art in relation to the coupled problems of heat transport and flow in porous media, especially in aquifers, under different thermal boundary conditions (including sinusoidal-type harmonics) on the surface, and horizontal, vertical and oblique water flows. The review was focused on the influence of physical (including groundwater discharge) and geometric parameters on vertical temperature-depth profiles.

Objectives

- 2) Carrying out an alternative theoretical study of vertical flow (both upward and downward), as well as the horizontal and oblique flow, using non-dimensionalization techniques to characterize groundwater flow from the precise obtaining of the dimensionless groups that rule the problem solutions. These groups depend on the geometry of the scenario, the aquifer thermal parameters, even the boundary conditions (thermal and hydraulic). For this, it will be necessary to carry out precise numerical simulations from the network models designed for these physical scenarios.
- 3) Application of the previous results to the Mar Menor scenario at its location in Los Alcázares (Cartagena, Region of Murcia, Southeast of Spain). For this, a collection and analysis of field data taken continuously have been carried out: piezometric heights, water temperatures at different depths (by means of ibuttons) and temperature variation on the ground surface.
- 4) Compilation and study of the thermal properties of the subsoil: thermal conductivities, specific heats of the water-soil matrix and thermal diffusivity. Knowing the value of the aquifer thermal diffusivity is of vital importance to have a good approximation of thermal inertia of the ground in the face of changes in surface temperature.
- 5) Development of specific numerical codes based on the network simulation method (MESIR) for solving the direct problem of subsoil temperature distribution, assuming groundwater inlet velocities or conditions of constant hydraulic potential in the boundaries. Network models are generated for: i) flows in which the velocity has only a vertical or horizontal component, ii) oblique flows and, iii) river-aquifer interaction scenarios. Both network models have been generated, simulated using the free code Ngspice (in combination with MATLAB), as well as specific models for MODFLOW and MT3MDS.
- 6) Fine-tuning and verification of the numerical codes developed through simulations of real cases or by comparison with cases already known and tested in the scientific literature.
- 7) Preparation, for each of the problems, of curves, abacus and universal surfaces that allow the most precise and useful representation of the solutions obtained from the non-dimensionalization of mathematical models.
- 8) Development of data acquisition methodologies for the estimation groundwater flow (or velocity) from the geometric and physical parameters of the aquifer and the recording of temperature-depth profiles in the field, establishing appropriate inverse problem protocols for this purpose. Such protocols make use of the universal representations mentioned in the previous point and require new numerical simulations.

Objectives

9) Application of the protocol to estimate water flow velocity in the aforementioned scenario of the Mar Menor.

Capítulo 1. Introducción

- 1.1 Presentación e introducción**
- 1.2 Metodología**
- 1.3 Perspectivas**
- 1.4 Estancia internacional**

1.1 Presentación e introducción

Durante mi cuarto curso en el grado en Ingeniería Civil realicé mi Trabajo fin de Grado con los profesores Gonzalo García Ros e Iván Alhama Manteca, ambos del Área de Ingeniería del Terreno perteneciente al Departamento de Ingeniería Minera y Civil de la Escuela de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Cartagena. Se trató de un proyecto en el cual se estudiaba la consolidación radial en suelos realizando ensayos mediante una Célula de Rowe. Desde ese momento, comenzó una fructífera relación que continuó en 2019, año en el cual fui Becario de Formación-Colaboración durante tres meses en los cuales, además de aprender a utilizar el software comercial de elementos finitos PLAXIS 2D y de escribir un libro con ejercicios resueltos, di mis primeros pasos en el mundo de la investigación. A raíz de esta productiva colaboración, los profesores anteriormente citados y el Catedrático de Universidad Francisco Alhama López, me ofrecieron continuar trabajando con ellos, pero, en este caso, en un proyecto más ambicioso. Iván Alhama y Gonzalo García se ofrecieron a ser mis directores del Trabajo Fin de Master y, posteriormente, me propusieron realizar una tesis doctoral en el campo de los problemas de flujo y transporte de calor en medios porosos, ofreciéndose Francisco Alhama a ser mi director. Para ello, solicité una ayuda a la Fundación Séneca que me fue concedida para el período 2020-2024, gracias a la cual, además de ser alumno de la Escuela Internacional de Doctorado, me convertí en Contratado Predoctoral e Investigador laboral en formación, permitiéndome ser profesor mediante Venia Docendi. El proyecto de tesis doctoral se enfoca en la caracterización del problema de flujo simultáneo de calor y fluido en medios porosos, así como en la elaboración de protocolos de problema inverso que permitan obtener el caudal o la velocidad del agua subterránea a partir de mediciones de perfiles de temperatura en el terreno. Se buscaba que algunos de los protocolos propuestos fueran aplicados en proyectos financiados para la solución de escenarios reales, como puede ser su aplicación en el entorno del Mar Menor.

El grupo de “Simulación por redes” tiene una amplia experiencia y es puntero tanto en el campo de la caracterización dimensional como en el de la solución de problemas inversos, utilizando como herramienta numérica el “Método de Simulación por redes”, también llamado “MESIR”. Esta metodología permite diseñar el modelo en red (o circuito eléctrico), asociado a cualquier proceso físico definido mediante un modelo matemático (en general, un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales con sus condiciones de contorno e iniciales), y simularlo en un software adecuado de resolución de circuitos. La metodología es capaz de abordar problemas transitorios, lineales o no, y acoplados en una o más variables.

La simulación del problema acoplado de transporte de calor y flujo de fluido es muy conocido y es tratado en general en la literatura como un problema lineal en las ecuaciones de gobierno, pero aquí recoge condiciones de contorno de tipo armónico para la temperatura en la superficie del terreno (derivadas de las condiciones ambientales), lo que lo convierte en no lineal y por tanto muy poco susceptible de ser resuelto analíticamente. La existencia de técnicas numéricas fiables, de fácil manejo por el usuario y computacionalmente rápidas, hacen optar por el diseño y la posterior verificación de códigos numéricos que permitan resolver este problema en todos sus escenarios (dependiendo del tipo de flujo).

1.2 Metodología

La técnica utilizada para la obtención de soluciones universales es la adimensionalización discriminada y normalizada del modelo matemático del problema. El primer paso es la correcta definición de las ecuaciones de gobierno del problema y de sus condiciones de contorno térmicas e hidráulicas, más las posibles condiciones iniciales. El siguiente paso es la definición de las variables adimensionales en forma normalizada, es decir, con un rango numérico confinado al intervalo $[0, 1]$. Sustituyendo las variables adimensionales en las ecuaciones de gobierno se obtienen las ecuaciones de gobierno adimensionales, y, a partir de las mismas, los grupos adimensionales. El uso de la discriminación en este proceso de adimensionalización asegura que las referencias tomadas para la definición de las variables adimensionales son diferentes, en general, para cada dirección espacial. Una vez establecidos los grupos o monomios adimensionales se aplica el teorema de pi, que permite expresar ciertas variables o incógnitas de interés, definidas en su forma adimensional, como una función de los grupos adimensionales sin incógnitas, es decir los grupos deducidos a partir de la geometría y los parámetros físicos que intervienen el modelo matemático.

Las expresiones obtenidas, también llamadas soluciones universales deben verificarse por medio de simulaciones numéricas y posteriormente, construir representaciones universales en forma de curvas, ábacos o superficies universales que puedan ser usadas tanto para la interpretación de dichas soluciones como para la definición de un protocolo de problema inverso definido en su forma clásica.

Para la verificación de las soluciones se han utilizado programas comerciales como VS2DHI, MODFLOW o MT3DMS, ya muy introducidos en la comunidad científica. Sin embargo, la mayor parte de las representaciones universales se han realizado a partir de modelos en red simulados en Ngspice o Pspice. El método de simulación por redes posibilita el estudio de cualquier proceso que pueda definirse mediante un conjunto de ecuaciones que formen un modelo matemático.

Está compuesto de dos fases: la elaboración de un modelo en red o circuito eléctrico equivalente y la simulación del proceso por medio de un programa adecuado para la resolución de circuitos eléctricos. Para elaborar un modelo en red, el primer paso es la reticulación del dominio en celdas elementales. En cada una de las celdas se aplican las ecuaciones diferenciales, en diferencias finitas para la variable espacial, deducidas del modelo matemático que rigen el problema, estableciendo una correspondencia entre las variables del problema y las variables del circuito eléctrico.

1.3 Perspectivas

Creemos que la técnica desarrollada en esta memoria es, por un lado, susceptible de aplicar a otros escenarios de mayor complejidad, presentando para ellos nuevas soluciones universales y planteando sus correspondientes problemas inversos de interés. Por otro lado, y será lo primero que planifiquemos, tenemos previsto la realización de un proyecto ambicioso, de carácter nacional o internacional, en el entorno del Mar Menor. En él, queremos determinar de la forma más precisa posible el caudal de vertido en diferentes localizaciones, desde el acuífero circundante hacia la laguna del Mar Menor, a partir de perfiles de temperaturas registrados bajo el nivel freático (zona saturada) realizados en sondeos en el terreno. Para ello, será necesario, en un primer estadio, determinar en laboratorio las propiedades térmicas de muestras inalteradas durante la realización de los sondeos (un número suficiente), así como las componentes de la permeabilidad hidráulica. Si el proyecto cuenta con la suficiente financiación, se tiene previsto la adquisición de caudalímetros para verificar los resultados obtenidos. De no ser así, buscaríamos la colaboración de universidades españolas u otras instituciones que contasen con estos equipos.

Debido al gran número de modelos en red creados para verificar las soluciones obtenidas en el proceso de adimensionalización y para representarlas gráficamente de forma que puedan utilizarse en protocolos de problema inverso, se elaborará un software libre que permita la resolución del problema térmico y/o del problema mecánico quedando registrado para su uso libre por la comunidad científica.

1.4 Estancia internacional

Durante mi estancia presencial en el Departamento de Geociencia de la Universidad de Aarhus (Dinamarca), realicé, en primer lugar, una revisión exhaustiva y actualización de la bibliografía relativa al estado del arte de mi investigación de carácter científico. En la revisión comprobaba

si los autores realizaron simulaciones numéricas o, por el contrario, hicieron uso de soluciones analíticas o semianalíticas. También organicé los manuscritos en función de la dirección espacial del flujo de agua subterránea en el terreno y en función de las condiciones de contorno de la temperatura en las fronteras, teniendo en cuenta sobretodo la condición térmica en la superficie del terreno. Por último, los clasifiqué en función de cómo representaban las soluciones obtenidas o de si proponían protocolos de problema inverso para la determinación del caudal o de propiedades físicas del subsuelo.

También aprendí a utilizar los programas MODFLOW y MT3DMS en la interfaz GMS. Resolví en primer lugar ejercicios con mallados sencillos aplicados a modelos conceptuales, posteriormente, problemas con mallados más complejos trabajando tanto en dos como en tres dimensiones. Se realizaron simulaciones con diferentes condiciones de contorno hidráulicas y térmicas de los escenarios simulados.

Trabajando de forma combinada con MODFLOW y MT3DMS, se resolvieron problemas de transporte de contaminantes para, finalmente, estudiar el flujo simultáneo de calor y fluido en medios porosos estableciendo condiciones de contorno térmicas lo más parecidas a la realidad. También simulé escenarios con focos térmicos y sondeos, estudiando tanto el problema transitorio como el estacionario.

Finalmente, durante la última parte de la estancia presencial, realicé simulaciones numéricas con los citados programas utilizando datos reales y series sintéticas obtenidas de la bibliografía, comparando los resultados obtenidos con los presentados en los artículos.

Debido a la situación pandémica, la segunda parte de la estancia se llevó a cabo virtualmente. Durante esta etapa, en primer lugar, se realizó la comparación de los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas de los modelos red creados en etapas previas de la investigación (simulados mediante Pspice y Ngspice) con los obtenidos en MODFLOW y MT3DMSM para poder afirmar que los resultados obtenidos a partir de los modelos en red son prácticamente idénticos a los obtenidos con los softwares comerciales. Esta tarea constituye, en la práctica, una nueva verificación de nuestros modelos en red.

Se compararon también las soluciones analíticas obtenidas por otros autores, y publicadas en revistas científicas u otros medios, con las deducidas por nosotros mediante la técnica de adimensionalización discriminada y normalizada. Todo ello para flujos unidimensionales verticales y horizontales, flujos oblicuos y sistemas de interacción río-acuífero.

Capítulo 2. Estado del arte

- 2.1 Introducción al estado del arte**
- 2.2 Modelos 1D**
- 2.3 Caso de flujos horizontales**
- 2.4 Modelos 2D y 3D**
- 2.5 Grupos adimensionales y otros temas relacionados con el ‘análisis dimensional’**
- 2.6 Sobre las soluciones analíticas y numéricas**
- 2.7 Sobre las condiciones de contorno y el tipo de transporte**
- 2.8 En relación con aspectos más específicos**

El presente capítulo introduce, en primer lugar, el estado del arte de los problemas objeto de esta memoria, indispensable para incardinar el tema de investigación en el contexto de los avances más recientes. Se ha realizado un estudio exhaustivo de los trabajos relacionados con la estimación de flujos de agua subterránea a partir de perfiles de temperatura, haciendo especial hincapié en aspectos teóricos relacionados con: i) el modelo físico y matemático, ii) la definición de escenarios patrones, iii) la introducción y el papel que juegan los grupos adimensionales en las soluciones y iv) el planteamiento del problema inverso y otros.

Son pocos y relativamente antiguos los trabajos que presentan soluciones analíticas o semianalíticas, y básicamente se refieren a escenarios 1D. La mayor parte de los artículos más recientes están dedicados a estimaciones más o menos cualitativas en escenarios físicos concretos mediante la aplicación de técnicas numéricas o mediante la aplicación de programas comerciales. A pesar de tratarse de un problema matemáticamente sencillo, muy factible de abordar mediante técnicas numéricas, resulta difícil correlacionar de forma más o menos analítica, los perfiles térmicos y de flujo, quizás con excepción del caso de flujos verticales. Mucho más si la velocidad de los flujos no es constante en todo el dominio, como es el caso más usual en contornos donde se implementan potenciales hidráulicos, por ejemplo, en el escenario de interacción río-acuífero. El estudio bibliográfico no sólo nos ha permitido centrar el objetivo esencial de la memoria, sino también nos ha abierto el campo a la investigación de otros escenarios de condiciones de contorno (térmicas y/o hidráulicas) más complejas.

2.1 Introducción al estado del arte

La relación entre los perfiles de temperatura en profundidad y el flujo de agua subterránea aparece en la literatura científica desde hace varias décadas. Quizás, el objetivo principal, como se ha mencionado en el Capítulo 1, sea la identificación de localizaciones en las cuales las aguas superficiales y las profundas interactúen, regiones que pueden ser de importancia en el campo de la ingeniería en diversos contextos relacionados con balances térmicos e hídricos, así como para la determinación de migración de solutos y/o contaminantes. Bouyoucos [1915] es, probablemente, uno de los primeros autores que cita el tema del acoplamiento entre flujo de calor y flujo de agua en suelos. Más tarde, Bullard [1939] atribuye los cambios en el perfil de temperatura con la profundidad a la coexistencia de cambios climáticos y flujo de agua subterránea.

La influencia del clima en la temperatura del suelo aparece también en las referencias antiguas de Lane [1923], Birch [1948] y Lachenbruch y Marshall [1986]. Cartwright [1970] afirma que el

efecto del movimiento del agua subterránea sobre el campo de temperaturas en el subsuelo es significativo ya que la densidad de flujo de calor natural de la tierra (desde su interior) es muy pequeña. Otros trabajos más recientes, como los de Chapman [1995] y Beltrami y Harris [2001], estudian el cambio climático a partir de las medidas de temperatura del suelo. Los últimos autores afirman que los cambios ocurridos en las últimas décadas alejan la temperatura del suelo de lo que debería ser su perfil normal hasta profundidades de 100 m. Según Reiter y Mansure [1983] y Chapman y col. [1984], para obtener datos térmicos de la corteza profunda y el manto terrestre que no estén afectados por el flujo subterráneo de agua, es necesario llegar hasta profundidades de cientos, incluso miles de metros. Hay trabajos que asocian la curvatura de los perfiles temperatura - profundidad, hasta profundidades de 100 o más metros (más acusados en latitudes nórdicas), como indicativos del calentamiento superficial de la tierra (Pollack y Chapman [1993]).

La importancia de las interacciones entre cuerpos de agua superficial y cuerpos de aguas subterráneas, incluyendo aspectos ecológicos, de conservación, químicos, etc., con numerosas referencias y alusiones a la directiva de la Comisión europea, queda justificada (y, asimismo, el objeto de la presente tesis doctoral) en el trabajo relativamente reciente de Keery y col. [2007].

En el campo de la hidrogeología, autores que han reconocido la influencia del transporte de agua en el flujo de calor son Stallman [1963, 1965], Bredehoeft y Papadopulos [1965], Parsons [1970], Cartwright [1971], Domenico y Palciauskas [1973], Kilty y Chapman [1980]. Autores como Bredehoeft y Papadopulos [1965], Cartwright [1970], Sorey [1971] y Keys y Brown [1978] han usado esta influencia para obtener los campos del flujo calorífico, Bair y Parizek [1978] para determinar propiedades hidráulicas y Kappelmeyer [1957], Cartwright [1968] y Birman [1969] para la investigación de acuíferos poco profundos.

Sobre el problema de flujo y transporte, en general, Schneider [1964] observó el pequeño gradiente térmico en rocas carbonatadas explicado sólo por la existencia de flujos de agua “meteórica” de recarga (ascendente) que distribuían el calor procedente del interior de la tierra. Miffin [1968] y Van Orstrand [1934] hicieron las mismas observaciones para tratar de explicar los manantiales térmicos en regiones carbonatadas de Nevada y las alteraciones de los gradientes geotérmicos en regiones permeables de Wyoming, respectivamente.

Stonestrom y Constantz [2003] y Anderson [2005] justifican el uso de perfiles térmicos para cuantificar la descarga de agua subterránea de forma “relativamente rápida, precisa, robusta y rentable”. Afirma que, mientras que (de acuerdo con Lapham [1989]) las temperaturas en zonas de descarga de agua subterránea de profundidades entre 5 y 10 m tienden a permanecer

relativamente constantes durante el año (con variaciones inferiores a 1.5 °C), las temperaturas del agua superficial soportan grandes cambios entre invierno y verano.

El avance para la comprensión cuantitativa de estos procesos requiere una labor intensa de muestreo tanto en el propio río o arroyo como en su lecho (Harvey y Wagner [2000] y Gooseff y col. [2006]), tarea que permitiría avanzar en el conocimiento de temas tales como el almacenamiento transitorio, conductos de flujo en la cuenca o lecho y, en general, para profundizar en la comprensión conceptual de los intercambios de agua y diseñar modelos cuantitativos (Packman y Bencala [2000] y Lautz y Siegel [2006]).

Un estudio preciso, de acuerdo con Smith y Chapman [1983], requiere un conocimiento completo del ambiente del escenario y el concurso de un número suficiente y convenientemente espaciado de medidas de temperatura para obtener resultados fiables. Además, es conveniente incluir la dispersión hidrodinámica si los flujos son significativos. Constantz [2008] contiene una revisión completa del calor como trazador del flujo de agua, particularmente en arroyos. Por un lado, este autor describe las diferentes técnicas de medida: i) pulsos de calor, ii) pérdidas de calor, iii) series temporales de temperatura, y iv) modelos de flujo y transporte. Por otro lado, aporta sugerencias para trabajos futuros basados en las mediciones de temperatura para avanzar en este campo. Así, dice textualmente: *“la introducción de un dispositivo de adquisición de datos de un solo canal en miniatura, capaz de insertarse en piezómetros y otros instrumentos invasivos, fue un avance clave que resultó en una rápida proliferación del calor como marcador en el entorno cercano a la corriente”*. Constantz [2008] habla de la poca influencia de la fase de vapor (en el suelo) en el transporte del calor, al que le atribuye 4 mecanismos: radiación, conducción, convección y advección. La convección se refiere a la superficie superior del lecho mientras que la advección es el puro transporte por flujo de agua y ocurre bajo la superficie.

De acuerdo con Schmidt y col. [2007], el intercambio entre agua superficial y subterránea se ha convertido en un importante tema en las últimas dos décadas, Brunke y Gonser [1997], Winter [1998] y USEPA [2000]. Según estos autores, este intercambio conlleva o se caracteriza por:

- cambios en los materiales geológicos,
- gradientes hidráulicos pronunciados,
- sedimentos con contenido de carbón orgánico elevado,
- contrastes en las condiciones reducción-oxidación y
- un aumento de la actividad y diversidad biológica y microbiana.

Todos estos factores influyen notablemente en el transporte y destino de solutos, nutrientes y contaminantes en el agua que se mueve a través del lecho o las orillas de un río (Hedin y col.

[1998], Conant Jr. y col. [2004] y Laursen y Seitzinger [2005]). Para entender estos procesos biogeoquímicos y de transporte en la interfaz entre aguas superficiales y aguas profundas, es necesario caracterizar y monitorizar con precisión las condiciones del flujo en el lecho (Conant Jr. [2001]). De hecho, esta necesidad es un desafío porque se ha demostrado que los patrones de flujo y descarga en los lechos del río varían en una escala de centímetros a metros (Brunke y Gonser [1997], Woessner [2000], Brunke y col. [2003], Storey y col. [2003], Conant Jr. [2004] y Kalbus y col. [2007]).

Las recientes directivas europeas (European Commissions [2000]) regulan la gestión de los ríos y exigen una gestión integrada entre masas de aguas profundas y aguas superficiales para alcanzar un estado de calidad para ambos recursos hidrológicos. Tales directivas, por otro lado, plantean la necesidad de métodos precisos (aparte de los clásicos) para caracterizar los patrones de descarga en los lechos de ríos y arroyos, y con ello la mejor comprensión de las interacciones entre aguas superficiales y profundas.

Otra de las razones que justifica el uso de nuevos métodos de mayor resolución para determinar propiedades físicas del suelo y flujos en general, incluyendo sus variabilidades espaciales en lechos tanto a pequeña como a gran escala, es el hecho de que las medidas directas del caudal a través de “medidores de filtraciones” o de “minipiezómetros” (Lee y Cherry [1979]) u otros métodos standard (Kalbus y col. [2006]) son difíciles y caros (Lapham [1989]). Estos métodos permitirían:

- detectar las pequeñas regiones (a lo largo todo el dominio) en las que se dan los grandes flujos que determinan la descarga global y el transporte de solutos, Conant Jr. [2001] y Schmidt y col. [2006]),
- caracterizar la magnitud (y el patrón) de la descarga para inferir las condiciones geoquímicas en el lecho, Conant Jr. [2001] y Kalbus y col. [2007] y
- caracterizar la vida acuática bentónica e hiporreica que depende de la distribución del agua subterránea, Malcolm y col. [2003] y Brown y col. [2007].

Hay que mencionar en este punto la existencia de otros protocolos tales como los de Scanlon [1994], que da estimaciones mediante técnicas químicas o isotópicas, y el de Izbicki y Michel [2002], que utiliza el tritio, ambos en zona no saturada.

La concurrencia de flujo de fluido y transporte de calor es de interés en numerosos problemas de ingeniería, y se manifiesta en numerosos trabajos antiguos y recientes: problemas de geología de extracciones petrolíferas (Van Orstrand [1934], de convección natural (Podolsky

[1951] y Wooding [1957]) y escenarios relacionados con problemas patrones como los de Yusa, Elder y Bénard, (Cánovas y col. [2015, 2016]).

Merced a la ingente cantidad de publicaciones sobre el tema, hemos decidido clasificar las referencias, a partir de este punto, atendiendo a los aspectos que consideramos más relevantes.

2.2 Modelos 1D

Sobre este tema, los autores Woodbury y Smith [1985] son contundentes: “*Debido a que cada entorno hidrológico es único, el único enfoque factible para seguir tratando con sistemas del mundo real es construir modelos específicos del sitio, calibrados contra datos térmicos e hidrológicos ubicados adecuadamente dentro de la cuenca*”. Estamos de acuerdo, sin descartar que estudios básicos sobre problemas tipo patrón (denominados en la literatura científica “*benchmark problems*”) pueden contribuir a una mayor y completa comprensión de los fenómenos físicos involucrados en estos problemas.

Una primera clasificación de los trabajos debería atender al tipo de modelo matemático propuesto por los autores:

- modelos 1D con flujos verticales u horizontales,
- modelos 2D y/o 3D para flujos oblicuos, flujos verticales y/u horizontales cerca de la frontera de entrada de flujo del dominio, o flujos no constantes en el dominio inducidos por condiciones de contorno de potencial hidráulico.

2.2.1 Caso de flujos verticales

El primer autor que usa el modelo para medir velocidades y conductividades verticales es Stallman [1963], si bien Suzuki [1960] hace estimaciones del flujo vertical a partir de las medidas de las atenuaciones de la onda de la oscilación de temperatura a determinada profundidad. De acuerdo con Taniguchi y Sharma [1993], sólo para recargas pequeñas y midiendo la temperatura a profundidades máximas del orden de 5 metros aproximadamente, es posible usar el método de Stallman [1965], denominado “*relative temperature difference method*”, para asegurar soluciones precisas. Los autores, en sus aplicaciones a escenarios concretos, adoptan profundidades de entre 1.5 y 2.5 metros. Taniguchi [1993] elimina una aproximación del método de Suzuki y desarrolla una expresión matemática exacta (procedimiento de la gráfica “*type-curve*”) para la determinación del flujo vertical. Las contribuciones de este autor al campo de la hidrogeología se recogen en la revisión de Weeks [2006], mientras que Anderson [2005] contiene una revisión completa de los escenarios de flujo vertical hasta esa fecha.

Suzuki [1960], Bredehoeft y Papadopoulos [1965] y Stallman [1965] proponen soluciones analíticas para medios semi-infinitos con variación sinusoidal de la temperatura en la superficie del terreno y una temperatura media en el fondo del dominio igual a la media de la temperatura en la superficie. Turcotte y Schubert [1982] estiman flujos estacionarios mediante un programa con hoja de cálculo para el que existe un valor límite de flujo (que depende de los parámetros del problema) por encima del cual el método no es válido. Estos autores asumen una temperatura fija (la media de la excitación armónica) en la superficie del agua y la solución numérica evalúa los perfiles de temperatura en el lecho cada dos horas. Woodbury y Smith [1985] proponen un modelo unidimensional con flujo de calor constante en su base.

También Lapham [1989], a partir de perfiles temperatura-profundidad en función del tiempo, proporciona una solución analítica en diferencias finitas discretizando espacial y temporalmente la ecuación de gobierno de flujo simultáneo de calor y de fluido en medios homogéneos e isótropos, considerando el fluido incompresible y, de nuevo, la temperatura en el fondo del dominio igual a la temperatura media de la frontera superior. Esta solución es aplicable a condiciones de temperatura armónica (no necesariamente sinusoidales) en la superficie y permite determinar tanto el flujo vertical como la conductividad hidráulica isótropa.

Otros autores que trabajan con modelos unidimensionales son Lapham [1989], Silliman y Booth [1993], Taniguchi y col. [1999], Ferguson y col. [2003], Ferguson y Woodbury [2005], Hatch y col. [2006] y Keery y col. [2007]. Silliman y Booth [1993] registraron la temperatura en los sedimentos y en el fondo (*streambed*) como herramienta para la detección cualitativa de flujos verticales procedentes de pequeños ríos. En un trabajo posterior, Silliman y col. [1995] proponen un método matemático para la determinación de flujos verticales descendentes constantes. Finalmente, Tabbagh y col. [1999], proponen un modelo complejo 1D, con flujo de calor en la superficie superior, temperatura fija en el fondo y con cambios en las propiedades térmicas con la humedad. Desarrollan una solución analítica con la función complementaria de error basada en técnicas de Fourier, descomponiendo el flujo en la superficie en sus componentes armónicas.

Ya en las dos últimas décadas Reiter [2001] propone un nuevo método inverso para determinar flujos 1D verticales (sólo descarga), y flujos 1D horizontales; para estos últimos requiere estimaciones del gradiente de temperatura horizontal, que generalmente no está disponible. Constantz y col. [2002] usan los perfiles de temperatura en el lecho para detectar corrientes de flujo en canales efímeros mientras que en un trabajo posterior Constantz y col. [2003] concluyen que el calor tiene un valor similar como trazador al compuesto químico bromuro. Constantz y Stonestrom [2003] apuntan que las mejoras significativas de (por un lado) las técnicas de adquisición de datos y (por otro) las técnicas de computación numérica, facilitan y economizan

las rutinas de aplicación del calor como trazador hidrológico. Conant Jr. [2004] compara las estimaciones de flujo a partir de múltiples piezómetros con las obtenidas a partir de la temperatura, para establecer su relación matemática en cada escenario estudiado. Becker y col. [2004] cuantifican la variabilidad espacial de la descarga. Blasch y col. [2004] desarrollan un método estadístico para periodos de flujo en arroyos efímeros a partir de la solución de Stallman [1965].

Schmidt y col. [2007] y Conant Jr. [2004] usan la solución de Turcotte y Schubert [1982]. Conant Jr. [2004] asume la hipótesis de que *“las temperaturas del lecho del río en todos los lugares se encuentran en un estado casi estable durante el período de mapeo del alcance de la corriente”*. No se toman series temporales de temperatura sino la temperatura a una misma profundidad, pero en localizaciones diferentes. Esta es una diferencia con métodos clásicos previos de (Bredehoeft y Papadopoulos [1965], Stallman [1965], Suzuki [1960], Turcotte y Schubert [1982], Silliman y col. [1995], Taniguchi y col. [1999], Hatch y col. [2006], Schmidt y col. [2006]) que trabajan con la ecuación de difusión y advección (1D) y que usan, o bien series temporales de temperaturas a una misma profundidad, o temperaturas a distintas profundidades. En el esquema físico de la figura de Conant Jr. [2004], para un mismo valor de las propiedades térmicas del lecho y de diferencia de temperaturas entre la noche y el día, la región de oscilación diurna (región del lecho acotada desde el fondo del arroyo hasta una profundidad en la que las variaciones de temperatura causadas por la oscilación diurna son prácticamente nulas) es únicamente función de la velocidad de descarga del fondo hacia el acuífero.

Para nosotros, como se verá en el Capítulo 4, el espesor de la llamada zona diurna de oscilación es en realidad una longitud o profundidad (oculta o incógnita) característica del problema que dependería de los grupos adimensionales que gobiernan la solución del problema, susceptible de ser representada gráficamente de forma universal aplicando el teorema de pi (Buckingham [1914]). Las desviaciones de temperatura en cada cota dentro de esta longitud característica serán proporcionales al cociente entre dicha cota y dicha longitud.

Goto y col. [2005] también parten de la solución analítica de Stallman para estimar el flujo vertical de agua de mar en sedimentos en un contexto oceanográfico, utilizando la atenuación y la fase del perfil de temperatura a partir de la onda semi-diurna de esta variable. Bendjoudi y col. [2005] desarrollan un método para obtener flujos verticales, promediados (en diez días), con análisis estadísticos de la atenuación de las variaciones relativas transitorias de la temperatura. Holzbecher [2005], con un esquema de inversión numérica a partir series temporales de temperatura (no sinusoidales), desarrolla un procedimiento iterativo para estimar las propiedades térmicas y el flujo de agua vertical, con la selección inicial de cada

parámetro y valores límites superiores e inferiores del mismo. Advierte que el método puede fallar en la identificación del mínimo global de la función objetivo de la inversión. Loheide y Gorelik [2006] emplean imágenes térmicas de cámara infrarroja montada en helicóptero para inferir variaciones espaciales y temporales de la temperatura en arroyos. Hatch y col. [2006], a partir de la solución de Stallman, desarrollan un programa semiautomático para calcular información de la amplitud y la fase a partir de datos de temperatura representados gráficamente, con filtros que proporcionan la temperatura en cada minuto. Se seleccionan dos cotas de profundidad y se trabajan con los picos de la señal. Dan estimaciones de la variación de flujo vertical y de las propiedades térmicas (incluida la dispersividad).

Finalmente, Keery y col. [2007] trabajan con la ecuación de gobierno de Stallman midiendo los perfiles (picos y fase de la temperatura, independientes del tiempo) en dos cotas de diferente profundidad. Puede decirse que los autores más recientes utilizan alguno de los modelos ya expuestos para resolver escenarios concretos.

En cuanto a los métodos para determinar el flujo de agua vertical, Taniguchi y Sharma [1993] los clasifican en:

- i) El “*Type-curve method*” (representaciones gráficas de las soluciones analíticas) de Bredehoeft y Papadopoulos [1965]. Usa los perfiles de temperatura en profundidad para detectar el flujo vertical en el estacionario. Estas curvas fueron mejoradas por Stallman [1967] y Sorey [1971] para casos de flujos pequeños. Lo aplican Cartwright [1970 y 1979], Sakura [1978], Sorey [1971], Jessop y Vigrass [1989] y Taniguchi [1993], y lo verifican Cartwright [1979] y Boyle y Saleem [1979], mediante el “método de balance hídrico”.

Según Taniguchi [1993], las “*type-curves*” se aplican a flujo vertical unidimensional. Sus resultados se comparan satisfactoriamente con medidas reales (Cartwright [1970] y Sakura [1977]).

- ii) El “método de diferencia de temperatura relativa” que usa los cambios de amplitud y fase de la temperatura en profundidad (Stallman [1965]). Son soluciones con parámetros ciertamente “raros” desde el punto de vista de su significado físico (véase página 223 del paper de Taniguchi y Sharma [1993]), y que asumen las hipótesis de profundidad infinita y temperatura en el fondo del dominio igual a la temperatura media de la excitación armónica. Stallman [1965] contrasta su solución con la menos precisa de Suzuki [1960] y resuelve uno de los parámetros de su solución (ver también Taniguchi [1993]). Es difícil discriminar las soluciones analíticas de Suzuki [1960] y Stallman [1963] que se refieren al mismo modelo

matemático, modelo para el que Bredehoeft y Papadopoulos [1965] dan la solución gráfica de las denominadas “*type-curves*”.

Las soluciones de Stallman [1965] y de Bredehoeft y Papadopoulos [1965] son propensas a errores si se usa un mapa de datos a una única profundidad. La solución de Stallman requiere el uso de una serie temporal de temperaturas en una posición y, además, usa una condición de contorno de temperatura dependiente del tiempo (armónica sinusoidal).

- iii) El “*método de balance de calor*” propuesto por Wierenga y col. [1970] trabaja con los cambios de calor almacenados en la superficie para determinar los flujos de irrigación de agua. Lo usa Sakura [1984] que encuentra una rápida respuesta de la temperatura del suelo tras un episodio de lluvia. El método se usa en acuíferos poco profundos y no sirve para estimaciones de recarga fuera de este contexto.
- iv) Métodos que usan diferentes aproximaciones basadas en la conservación de la energía para detectar, por un lado, el transporte de calor convectivo debido al flujo (representando el gradiente de la temperatura en función de la propia temperatura) y, por otro, el transporte por conducción (Mansure y Reiter [1979], Jessop y Vigrass [1989] y Reiter y col. [1989]). Estos trabajos son citados por Taniguchi [1993].

2.3 Caso de flujos horizontales

Los flujos horizontales puros bajo condiciones de temperatura constante en las fronteras, más allá de cierta extensión característica no influyen en el perfil vertical de temperaturas por lo que, a menos que nos aseguremos que estamos dentro de dicha extensión característica (una especie de región de desarrollo del perfil estacionario), los perfiles no permiten determinar la velocidad del flujo horizontal. Las referencias bibliográficas son mucho menores que para el caso de flujo vertical. Así, Cartwright [1971, 1974] investiga un modelo 2D estacionario, con temperatura sinusoidal anual en la superficie. Reiter [2001] propone un nuevo método inverso para determinar flujos 1D horizontales en los que se conozca el gradiente horizontal de temperaturas (lo que equivale de hecho, a situarse dentro de la región de desarrollo de flujo), el cual generalmente no se conoce.

Ziagos y Blackwell [1981 y 1986] presentan estudios analíticos en escenarios en los cuales se produce flujo horizontal a través de una capa permeable situada entre dos regiones impermeables. Las condiciones superficiales de temperatura aseguran el acoplamiento continuamente cambiante entre flujo y transporte de calor. Un problema cuya caracterización dimensional es interesante. De Vries [1958] aborda un escenario transitorio complejo, con suelo

no saturado, aplicado más tarde por Milly [1982]. También, Taniguchi y Sharma [1993] aplican las “*type-curves*” con el uso de la medida de temperatura en pozos de similar profundidad, comparando satisfactoriamente sus soluciones con casos reales de Cartwright [1970] y Sakura [1977].

Lu y Ge [1996], finalmente, proponen soluciones analíticas para flujo horizontal bajo la hipótesis de existencia de gradientes constantes de temperatura horizontal en todo punto del dominio. La utilidad de estas soluciones es muy limitada y prueba de ello es que no existen citas a las mismas en la literatura científica posterior. La hipótesis de gradiente térmico horizontal constante es necesaria para el desarrollo de un perfil vertical de temperaturas que sólo cambia horizontalmente en un factor de escala, evita la elección de condiciones de contorno de temperaturas más o menos reales a la derecha e izquierda del dominio y no requiere la existencia de regiones de desarrollo del perfil las cuales se dan en todos los escenarios reales.

2.4 Modelos 2D y 3D

En flujos bidimensionales citaremos los trabajos de Cartwright [1971], Slattery [1972] y Bird y col. [1976] para velocidades no constantes en el interior del dominio, el estudio analítico de Domenico y Palciauskas [1973] y los ejemplos numéricos de Parsons [1970] y de Smith y Chapman [1983]. Los últimos hacen un estudio teórico-numérico de flujo y transporte en medios heterogéneos y anisótropos con flujo de calor en la base y dispersión.

Casos transitorios se presentan en Andrews y Anderson [1979]. Algo posteriores son los trabajos de Reiter [2001], de Su y col. [2004], Cox y col. [2007] y de Kulongoski e Izbicki [2008]. Su y col. [2004] abordan un escenario 3D con anisotropía, dispersión y zona no saturada. Cox y col. [2007] abordan un escenario modificado al de Su y col. [2004], con dispersividad y transporte de cloro, en donde se producen variaciones estacionales y anuales de temperatura y conductancia específica en el Río Ruso (California). Un análisis combinado de los cambios de temperatura, cloruro y conductancia específica conducen a una mejor cuantificación de los intercambios de flujo de agua dentro de un sistema aluvial en aguas poco profundas. La parte superior tiene un tramo donde está el río y el resto es el relieve del terreno. El nivel freático es horizontal y está al mismo nivel que el río. Kulongoski e Izbicki [2008] abordan, en desiertos semiáridos, la solución del problema inverso del cálculo de flujos, partiendo de las propiedades físicas del sedimento en desiertos semiáridos. Registran temperaturas a diferentes profundidades, bajo el arroyo o en las riberas cercanas mensualmente durante un ciclo anual. El reconocimiento de las zonas de alta infiltración puede permitir efectuar operaciones artificiales de recarga.

Merece la pena citar el trabajo 2D de Lu y Ge [1996] referido a un escenario de flujo oblicuo de velocidad constante. Los autores no hacen referencia a la región de desarrollo del perfil vertical de temperaturas (como ocurría en el flujo puramente horizontal) pero es evidente que dan soluciones para perfiles medidos dentro de esta región ya que, más allá, dichos perfiles permanecen independientes de la posición y de flujo horizontales. Es este uno de los escenarios caracterizados dimensionalmente en esta memoria donde obtenemos soluciones universales y aportamos propuestas de protocolo precisas para el planteamiento del problema inverso de la determinación de las componentes de la velocidad del flujo.

Woodbury y Smith [1985] proponen modelos 3D complejos continuando el trabajo 2D de Smith y Chapman [1983]. Introducen el efecto de fuerzas de flotación y la formación de células de convección en acuíferos poco profundos. Estudian los parámetros de los que dependen el arranque para la formación de estas celdas: la topografía del aliviadero, la distribución y magnitud de la permeabilidad del suelo, la anisotropía hidráulica y la profundidad del llamado “flujo activo”.

2.5 Grupos adimensionales y otros temas relacionados con el “análisis dimensional”

Estos aspectos se recogen dentro de lo que llamamos “caracterización dimensional” (3.2 del Capítulo 3 del presente trabajo), consistente en la determinación mediante la aplicación de un protocolo preciso de los grupos adimensionales que caracterizan las soluciones de un problema determinado.

Conviene anotar que algunos autores utilizan el término “caracterización” con un carácter más general. Por ejemplo, Su y col. [2004], Ronan y col. [1998], Essaid y col. [2008] y Fanelli y Lautz [2008] aluden en sus trabajos a la caracterización física, química y biológica de los lechos. En general, los autores admiten la existencia de grupos normalmente adimensionales formados por agrupaciones de parámetros físicos de todo tipo que juegan un papel importante en la búsqueda de soluciones de cualquier problema. Y ello con independencia del papel del teorema de pi para expresar estas soluciones. En la revisión de uno de los trabajos derivados de esta tesis relacionado con la caracterización adimensional y la búsqueda de soluciones universales, enviado a la revista *Water Resources Research*, uno de los revisores del mismo reconocía abiertamente que “nunca” había oído hablar del teorema de pi. Sin llegar a este extremo, hemos de decir que hemos tenido experiencias muy parecidas al enviar trabajos a revistas especializadas en hidrogeología y aguas subterráneas que parecen evitar manuscritos de este carácter. ¡Se admiten los grupos adimensionales clásicos (Reynolds, Rayleigh, Peclet, etc. a pesar

de la controversia y discusión que con frecuencia aparece en la literatura en relación con su significado físico, Bejan [1984] y Alhama y Madrid [2012]), pero existe mucho recelo en temas relacionados con su deducción o cualquier otra incursión sobre aspectos teóricos relacionados con los mismos! Precisamente uno de los temas esenciales de la presente memoria.

En problemas de flujo vertical (1D) y excitación térmica armónica en superficie, con solución analítica, la longitud a la cual los perfiles temperatura-profundidad se hacen prácticamente independientes del tiempo a una cierta profundidad característica depende de los parámetros físicos del problema, o mejor, de los grupos adimensionales que pueden formarse con estos parámetros. Quizás por la existencia de solución analítica, tal longitud característica, reconocida por todos los autores (Lapham [1989]), no es identificada “a priori” como una incógnita directa dependiente de los grupos adimensionales citados. Por el teorema de pi sería fácil determinar los monomios de los que depende esta longitud y representar dicha dependencia (mediante simulaciones numéricas precisas) como una curva universal ya que las desviaciones de temperatura en cada cota dentro de esta longitud serían sólo proporcionales al cociente entre dicha cota y la longitud característica mencionada.

Entre los pocos comentarios que sobre este tema se han encontrado en la literatura podemos citar los de Suzuki [1960], Stallman [1965], Ferguson y Woodbury [2005], Bredehoeft y Papadopoulos [1965] y Domenico y Palciauskas [1973]:

- i) En la solución analítica de Suzuki [1960] para este modelo aparecen dos parámetros, el llamado parámetro “a” determinado a partir de la ecuación de dependencia exponencial de la disminución de las amplitudes con la profundidad, y el “b” que se obtiene por ajuste. Stallman [1965] encuentra una expresión analítica para “a” (ec. (5) de su paper), una función compleja de los parámetros térmicos del medio poroso, la velocidad de recarga y el período de la onda sinusoidal. Sin embargo, en esta expresión de “b” hace intervenir dos nuevos coeficientes dimensionales (ecs. (6) y (7) del citado trabajo) de significado físico extraño: K (m^{-2}) y V (m^{-1}). A $K^{1/2}$ lo denomina parámetro de extinción mientras que V es un número de Peclet dividido por una longitud característica. En fin, un tanto engorroso y extraño desde el punto de vista dimensional (o de significado físico) por lo que entendemos que la asignación de dimensiones a estos parámetros responde a una aparente “buena práctica” en ingeniería. Siguiendo con este modelo, Taniguchi [1993] determina el parámetro “a”, introduciendo un nuevo parámetro adimensional β (m) que recoge propiedades térmicas del fluido y del medio, y construye unas curvas para determinarlo en función de β y K . No es más que una forma alternativa de determinar el parámetro “a” en la solución de Suzuki.

ii) Ferguson y Woodbury [2005] usan el P_e clásico que combina las propiedades térmicas del medio poroso y las del fluido, sin justificar la elección de la longitud que aparece en este número.

iii) Bredehoeft y Papadopoulos [1965] introducen el β (adimensional) con el significado físico

$$\beta = \frac{v_{p,e,w} c_{e,w} L}{k_m} \sim \frac{\text{advección}}{\text{difusión térmica}}$$

iv) Domenico y Palciauskas [1973] hacen un verdadero esfuerzo para introducir el tema de grupos adimensionales en su trabajo. Afirman que las anomalías en los perfiles dependen esencialmente de la magnitud del cociente “conductividad hidráulica/difusividad térmica” (K/α) y de la geometría del campo de flujo (separando la influencia geométrica de la física).

Los autores interpretan el grupo emergente del siguiente modo: *“la expresión K/α tiene el significado físico de longitud⁻¹, y puede tomarse como una medida de la eficiencia relativa de un elemento de material poroso para el transporte simultáneo de fluido por gradientes hidráulicos y calor por conducción. Si esta relación se multiplica por alguna longitud (l^*) que podría considerarse característica del movimiento del fluido en un medio poroso regional, resultaría una cantidad numérica o adimensional, $\frac{Kl^*}{\alpha}$. En breve se verá que esta longitud característica es proporcionada por una evaluación de los coeficientes cuando se especifica un caso especial de configuración del nivel freático”*. Más tarde afirman: *“Como la convección vadeada depende directamente del movimiento general del agua subterránea ambiental, la relación $\left(\frac{Kl^*}{\alpha}\right)$ también puede tomarse como una medida de la eficiencia relativa para el transporte simultáneo de calor por convección forzada y por conducción pura. Sin embargo, esta última afirmación no es exactamente cierta, ya que también se debe considerar la influencia de la longitud y la profundidad de la cuenca en la trayectoria del flujo”*. Pero K/α y $\frac{Kl^*}{\alpha}$ no pueden tener el mismo significado.

En su paper continúan diciendo que el monomio $\frac{Kl^*}{\alpha}$ parece ser análogo a un número de Peclet afirmando *“que es una relación entre la transferencia de calor por el movimiento a granel de un fluido y su transferencia por conducción”*. El número de Peclet, dicen, surge en problemas de convección y es fácilmente obtenido como el producto de R_e y P_r :

$$P_e = R_e P_r = \left(\frac{lv\rho}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{\mu}{\rho\alpha}\right) = \left(\frac{lv}{\alpha}\right)$$

Sin embargo, en estos problemas no hay difusión de masa por lo que no interviene, de forma separada, el número de Prandtl (relación de difusividades de masa y de calor).

Los autores continúan diciendo: “ R_e es ampliamente conocido como una cantidad no única porque la longitud característica y la velocidad se pueden elegir de muchas maneras, por ejemplo, el diámetro del grano (elegido por los experimentadores en flujo en medios porosos) y la velocidad de Darcy”, y afirman que l^* en flujos a escala regional debe ser elegida como alguna dimensión crítica relacionada con el “nivel freático” (es decir, algo asociado con la contribución de las fuerzas exteriores asociadas a la convección. Finalmente, como la relación de aspecto del dominio (H/L) también influye en el problema y los autores no quieren asumirlo como grupo adimensional independiente del P_e , proponen un número de P_e modificado (basado dicen, en “argumentos dimensionales” que no explican):

$$P_{e,\text{modificado}} = \left(\frac{l^*K}{\alpha}\right) \cdot \left(\frac{H}{L}\right)$$

con H y L la profundidad y la extensión del dominio, respectivamente, y l^* una longitud característica del “movimiento del fluido”; para los casos estudiados, l^* se encontró que era equivalente a la elevación media del nivel freático. Con $P_{e,\text{modificado}} \ll 1$, los perfiles tienen un gradiente casi constante, mientras que $P_{e,\text{modificado}} \gg 1$ lo tienen curvo (excepto en la línea de simetría que es también constante), ver Figura 4, p. 3810 de su trabajo.

Sin duda estos últimos autores son los que más profundizan sobre la caracterización dimensional por su esfuerzo en la búsqueda de un Peclet adecuado para los escenarios estudiados por ellos, llegando a expresiones como la del $P_{e,\text{modificado}}$ anterior que sería imposible de deducir por procedimientos formales de adimensionalización.

2.6 Sobre las soluciones analíticas y numéricas

Aparte de las primeras soluciones de Stallman [1963] para medio semi-infinito 1D, podemos citar:

- i) Bredehoeft y Papadopulos [1965] dan soluciones analíticas 1D, para casos estacionarios, ideales principalmente para acuíferos poco profundos donde los flujos son esencialmente verticales y las temperaturas en la superficie y en el fondo del dominio son constantes. Estas soluciones son ligeramente mejoradas por Stallman [1967] y Mansure y Reiter [1979]. Su aplicación tiene limitaciones, esencialmente causadas por las idealizadas condiciones de contorno discutidas por Lachenbruch y Sass [1977]. En la aplicación de estas soluciones, Cartwright [1970] se centra en acuíferos de 150 m de profundidad y flujos ascendentes y descendentes; Cartwright [1974] trabaja con acuíferos poco profundos para distinguir carga y recarga en meses de invierno y verano; Sorey [1971] estudia los flujos ascendentes de

acuíferos confinados; Ferguson y Woodbury [2005] impone temperaturas fijas en los contornos y Wankiewicz [1984] investiga las regiones donde predominan la conducción térmica o la convección.

- ii) Domenico y Palciauskas [1973] deducen soluciones analíticas estacionarias, 2D, siendo la conductividad hidráulica homogénea y fijando el nivel freático en la superficie del acuífero, determinando la influencia de la geometría del dominio. Esta solución la aplican Morgan y col. [1981] a Río Grande, determinando el umbral de permeabilidad a partir del cual los efectos térmicos son apreciables. Lewis y Beck [1977], Kilty y Chapman [1980] y Brott y col. [1981] proponen soluciones para condición de contorno de percolación de agua fría en la superficie que aplican en Noranda (Quebec), Wyoming y en la Planicie del río Snake, respectivamente. También hay estudios con modelos híbridos que confinan el flujo a una determinada región fracturada, estudiando la región que rodea a la fractura (Bodvarsson [1969,1973], Keys y Brown, [1978] y Ziagos y Blackwell [1981], estos últimos para acuíferos poco profundos).
- iii) Soluciones de Turcotte y Schubert [1982] usadas por Schmidt y col. [2007]; soluciones de Smith y Chapman [1983] en medios anisótropos y soluciones de Ziagos y Blackwell [1986] derivadas de Carslaw y Geager [1959] para acuíferos estrechos confinados y semi-infinitos (2D).
- iv) Entre los escenarios de mayor complejidad (medios heterogéneos) destacamos los tres siguientes. Reservorios de alta temperatura con fluidos multifase y transporte de calor de Pinder [1979] y Garg y Kassoy [1981]. Almacenamiento de calor de Lippman y col. [1977] y Tsang y col. [1981]. Sistemas geotérmicos de moderada y baja temperatura de Parsons [1970] en Ontario, que muestran numéricamente que las soluciones son sensibles a la permeabilidad y a la configuración del nivel freático, de Sorey [1976] en Long Valley Caldera, que estudia tasas de descarga y de Betcher [1977], que incluye análisis de sensibilidad. Finalmente, Andrews [1978] y Andrews y Anderson [1979] estudian flujos de agua dependientes del tiempo (pozos de bombeo).

En cuanto a soluciones numéricas citamos los trabajos de Smith y Chapman [1983] en medios heterogéneos, anisótropos, con flujo de calor en la cuenca. Woodbury y Smith [1985] que desarrollan un modelo numérico 3D que incluye fuerzas de flotación, en acuíferos poco profundos. Los trabajos 2D en transitorio de Lapham [1989], Andrews y Anderson [1979] y Holzbecher [2005]. Este último usa el “*PDE solver*” de Matlab sin restricciones sobre las condiciones de contorno, tomando las series de tiempo de la primera observación como

condición de contorno de las siguientes que, a su vez, determinan los parámetros óptimos mediante un procedimiento de estimación. Y finalmente los más recientes de Cox y col. [2007], Essaid y col. [2008], Kulongoski e Izbicki [2008] y Szymkiewicz y col. [2015].

2.7 Sobre las condiciones de contorno y el tipo de transporte

Como se sabe, las condiciones de contorno de flujo y temperatura juegan un papel fundamental en la solución de los problemas de flujo y transporte y es frecuente que no se conozcan y haya que aproximarlas en muchos escenarios reales. Lo más frecuente es implementar flujos o potenciales hidráulicos constantes combinados con superficies impermeables. El segundo caso da lugar a un patrón de flujo y potencial no constante que depende de la conductividad hidráulica. En cuanto a temperaturas, suelen imponerse condiciones de primera clase (temperatura constante o dependiente del tiempo) combinadas con condiciones de segunda clase homogéneas (paredes adiabáticas). Las condiciones armónicas para reproducir la temperatura ambiente son frecuentes si bien no útiles en muchos escenarios merced a la poca penetración de la onda armónica de temperatura. Por lo demás, se dan muchos escenarios reales en los que existen diferentes capas más o menos aisladas hidráulicamente intercaladas con o entre terrenos secos y otros casos de geometría compleja sólo susceptibles de ser resueltos numéricamente.

Como primeros trabajos citaremos los de Van Orstrand [1934], Bullard [1939] y Birch [1948] que justifican la necesidad de incluir la convección para explicar los perfiles de temperatura reales, o los trabajos de Lachenbruch y col. [1976], Lewis y Beck [1977], Reiter y col. [1979], Brott y col. [1981], Chapman y col. [1981], Majorowicz y Jessop [1981] y Shearer y Reiter [1981] que reafirman estas conclusiones con un mayor y más preciso número de medidas. Entre los trabajos que usan condiciones de temperatura de primera clase podemos citar los de Boyle y Saleem [1979], Hunt y col. [1996], Taniguchi y col. [1999] y Ferguson y col. [2003] que trabajan con perfiles verticales estacionarios para la estimación de flujos o tasas de recarga en acuíferos y humedales. Otros autores que trabajan con condiciones armónicas en superficie son Ward [1963], Collings [1969], Gilroy y Steele [1972], Collings [1973], Tasker y Burns [1974] y Shampine [1977].

Según Stallman [1965], pueden detectarse tasas de percolación de hasta 2 cm/día ($2.3 \cdot 10^{-7}$ m/s) con perfiles resultantes a partir de fluctuaciones diurnas de temperatura. Esta tasa puede bajar hasta 0.3 cm/día ($0.35 \cdot 10^{-7}$ m/s) en condiciones más favorables: i) terrenos de baja conductividad, ii) amplio rango de variación de temperaturas y iii) medidas cuidadosamente

realizadas y precisas. Con fluctuaciones anuales de temperatura, la detección puede llegar a valores de 0.1 cm/día ($0.11 \cdot 10^{-7}$ m/s). En referencia a estos valores, Su y col. [2004] afirman que los ciclos diarios producen efectos de cambio de temperatura en rangos de 0.2 a 2 metros de profundidad (Constantz y col. [2003]), mientras que los ciclos semanales y estacionales (anuales) producen cambios a profundidades mayores (Lapham [1989], Bartolino y Niswonger [1999] y Mihevc y col. [2002]).

Por otro lado, según Smith y Chapman [1983], permeabilidades inferiores $5 \cdot 10^{-17}$ m² producen regímenes puramente conductivos por la baja velocidad del flujo. La transición del régimen conductivo al convectivo tiene lugar bruscamente sobre un rango de permeabilidades de un orden de magnitud. Para el escenario estudiado por los autores, el umbral de paso es de $k = 7 \cdot 10^{-17}$ m².

2.8 En relación con aspectos más específicos

Respecto a otros aspectos más específicos, podemos citar las siguientes referencias:

- i) Sobre la estimación de regiones de carga y descarga dentro de un mismo escenario: Cartwright [1974], Taniguchi [1993], Silliman y Booth [1993], Tabbagh y col. [1999], Malcolm y col. [2002], Ferguson y Woodbury [2005], Holzbecher [2005], y Calvache y col. [2011].
- ii) Sobre aplicaciones a escenarios reales: Lapham [1989], Taniguchi [1993], Taniguchi y Sharma [1993], Reiter [2001], Stonestrom y Constantz [2003], Su y col. [2004], Holzbecher [2005], Ferguson y Woodbury [2005], Blasch y col. [2004], Keery y col. [2007], Cox y col. [2007], Essaid y col. [2008], Kulongoski e Izbicki [2008], Essaid y col. [2008], Duque y col. [2010] y Calvache y col. [2011].
- iii) Sobre aplicaciones en acuíferos de pequeño espesor (acuíferos poco profundos): Suzuki [1960], Stallman [1965], Frolov [1968], Cartwright, [1968, 1971, 1974], Birman [1969], Taniguchi [1993], Tabbagh y col. [1999], Cox y col. [2007] y Constantz [2008].
- iv) Que usan dispersión: Smith y Chapman [1983], Su y col. [2004], Keery y col. [2007] quienes afirman que para una dispersividad del 10% de la escala de longitud, ignorar su efecto solo es significativo para flujos de filtración fuera del rango de $[-3.28 \cdot 10^{-6}, 1.89 \cdot 10^{-5}]$ m/s. Por otra parte, el efecto de una dispersividad del 1% de la escala de longitud solo es significativo para flujos de filtración fuera del rango $[-5.58 \cdot 10^{-5}, 1.87 \cdot 10^{-4}]$ m/s.
- v) Que incluyen zona no saturada Milly [1982], Constantz y Murphy [1991], McCord y col. [1997], Izbicki y col. [1998, 2000], Tabbagh y col. [1999], Flint y col. [2000], Su y col. [2004], Kulongoski e Izbicki [2008] y Szymkiewicz y col. [2015].

- vi) Sobre escenarios anisótropos, Su y col. [2004] y Smith y Chapman [1983].
- vii) Que usan datos piezométricos además de perfiles de temperatura: Woodbury y Smith [1985], Reiter [2001], Bravo y col. [2002], Su y col. [2004], Conant Jr. [2004], Essaid y col. [2008].
- viii) Que utilizan programas específicos (generalmente VS2DHI), Reiter [2001], Su y col. [2004], Schmidt y col. [2007], Cox y col. [2007], Kulongoski e Izbicki [2008], Essaid y col. [2008], Duque y col. [2010], Calvache y col. [2011] y Szymkiewicz y col. [2015].
- ix) Que usan pulsos de calor u otras fuentes para determinar el flujo de agua: Byrne y col. [1967], Melville y col. [1985], Ren y col. [2000] y Wang y col. [2002].
- x) Aplicaciones a arroyos efímeros: Constantz y Murphy [1991] y Blasch y col. [2004].
- xi) Sobre el uso de perfiles de gradiente de temperatura como complemento al uso de perfiles temperatura-profundidad: Stallman [1963] y Reiter [2001].
- xii) Casos no transitorios: Mansure y Reiter [1979], Reiter y col. [1989], McCord y col. [1992], Lu y Ge [1996] y Reiter [2001].
- xiii) Que incluyen análisis de sensibilidad, Stallman [1965], Smith y Chapman [1983], Lapham [1997], Schmidt y col. [2007].

Capítulo 3. Fundamentos teóricos, modelos en red y escenarios

- 3.1 Modelo matemático. El problema directo**
- 3.2 Caracterización dimensional**
- 3.3 Método de simulación por redes**
- 3.4 Escenarios**
- 3.5 Planteamiento del problema inverso**

3.1 Modelo matemático. El problema directo

Se asumen las siguientes hipótesis de carácter esencial:

- flujo incompresible,
- ausencia de fenómenos dispersivos,
- ausencia de flujos causados con densidad variable (*density-driven flow*) y
- ausencia de fuentes o de sumideros en el dominio de medio poroso

Es importante destacar que el modelo matemático correspondiente a la parte mecánica (hidráulica) del problema, es decir, la que determina los patrones de flujo, está desacoplado del modelo térmico. De hecho, en gran parte de las aplicaciones estudiadas en el presente trabajo, la velocidad del flujo es constante y conocida: flujo vertical (ascendente o descendente) en escenarios unidimensionales de transporte de calor vertical, flujo horizontal en escenarios 2D, así como flujo oblicuo de velocidad constante. Por otra parte, se estudian escenarios en los cuales el flujo es oblicuo pero la velocidad no es constante, si no que depende de la posición en el dominio. Este flujo es generado por potenciales hidráulicos en escenarios de flujo y transporte 2D correspondientes a potenciales de valor constante en los contornos del dominio o a escenarios de interacción río-acuífero. Para estos escenarios, en los cuales la velocidad no es constante, la ecuación de gobierno aplicada es la de continuidad del fluido y las condiciones de contorno de primera (Dirichlet) y/o segunda (Neumann) clase. Respecto a la ecuación de gobierno de transporte de calor, se asume la existencia de los efectos de conducción (difusión), advección (arrastre) y almacenamiento. Las condiciones de contorno térmicas son de primera y segunda clase, más una condición especial denominada “condición libre”.

El problema mecánico en el escenario más complejo (interacción río-acuífero) tiene el siguiente modelo matemático:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ v_x = K_x \frac{\partial h}{\partial x} ; v_y = K_y \frac{\partial h}{\partial y} \end{array} \right. \quad 3.1.1$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y) \quad 3.1.2$$

$$h_{(0 < x < l, y=0)} = h_2 \quad 3.1.3$$

$$h_{(L, y)} = h_1 \quad 3.1.4$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{(l, 0 \leq x \leq L, 0)} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{(0, y)} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{(x, H)} = 0 \quad 3.1.5$$

En cuanto al problema térmico, el modelo está formado por las siguientes ecuaciones:

$$k_{m,x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{m,y} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \rho_{e,w} c_{e,w} V_x \frac{\partial T}{\partial x} - \rho_{e,w} c_{e,w} V_y \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad 3.1.6$$

$$T_{(x,y=0)} = T_1 \quad 3.1.7$$

$$T_{(x,y=H)} = T_2 \quad 3.1.8$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(x=0,y)} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(x=L,y)} = 0 \quad 3.1.9$$

3.2 Caracterización dimensional

El objetivo principal de la caracterización adimensional es la obtención de los grupos adimensionales independientes que regulan la solución o los patrones de solución de un problema físico o ingenieril. Por lo tanto, una vez obtenidos dichos grupos (que pueden expresarse u organizarse de distinta forma sin cambiar su número), se puede decir que el problema está caracterizado dimensionalmente. Como su propio nombre indica, los grupos adimensionales (agrupaciones convenientes de variables físicas y geométricas) carecen de dimensión permitiendo simplificar el estudio de un problema limitando la influencia en la solución al valor de dichos grupos y no al valor de las variables individuales que intervienen en ellos. Sin duda, la ventaja más importante de la caracterización dimensional sea la del diseño de modelos ya que reduce significativamente el número de experimentos de laboratorio necesarios para obtener las soluciones más universales del problema.

Buckingham [1914] presenta en su trabajo una deducción minuciosa y formal del teorema recogiendo una serie de problemas físicos en los que lo aplica de forma exitosa. Los escenarios que estudia son escenarios globales unidimensionales, por lo que no emergen en los mismos los denominados factores de forma o relaciones de aspecto como grupos adimensionales independientes relacionados y aportados por la geometría del problema. Por otra parte, tampoco propone ejemplos de aplicación a medios porosos lo cual no nos permite saber qué tipo de tratamiento habría dado a la porosidad, un parámetro de por sí adimensional y que formaría un único (o separado) grupo.

Existen ciertos grupos adimensionales clásicos como el de Reynolds, Peclet, Nusselt, Prandtl etc., que son admitidos como grupos adimensionales sin más discusión sea cual sea el problema del campo en el que intervengan, a pesar de que en las soluciones no aparezcan jugando el papel independiente que les corresponde, sino agrupados con otros parámetros, llamándose Peclet modificado, Nusselt modificado etc. La mayor parte de estos grupos han sido introducidos en la literatura por expertos experimentalistas que los han establecido tras un sinnúmero de pruebas

de laboratorio o de campo en lugar de realizando un análisis deductivo a través de los modelos matemáticos de los problemas. También resulta controvertido que el valor de un grupo adimensional sea de 1000 y se defina en términos de balance de magnitudes que se contraponen dentro de un fenómeno físico determinado, ya que es difícil entender como una magnitud balanceada 1000 veces inferior a otra que interactúa con ella no eliminaría el término correspondiente en la ecuación de gobierno (eliminando, en consecuencia, el efecto despreciable asociado a dicho término).

Los grupos adimensionales de un problema pueden establecerse siguiendo varios caminos:

- Mediante la investigación experimental en laboratorio por medio de modelos. Éste es un procedimiento costoso que, sin embargo, conduce a resultados precisos limitados al entorno en el que se trabaja y siempre que los modelos se hayan realizado correctamente.
- A partir de balances parciales entre pares de efectos o términos de la ecuación que los representan. Estos balances deben referirse a un mismo dominio o subdominio del escenario físico y, para expresarlos matemáticamente, se requiere una gran comprensión física del problema bajo estudio.
- Mediante la técnica de análisis dimensional. Esta técnica clásica es la más usada y consiste en atribuir dimensiones a cada una de las variables y parámetros físicos que intervienen en un problema y en formar (a partir de dicha atribución) las agrupaciones independientes entre variables y parámetros que tengan dimensión nula, mediante un protocolo matemático elemental. Uno de sus inconvenientes en problemas complejos es el hecho de no plantear correctamente el conjunto de variables relevantes del problema, lo que es frecuente en escenarios donde los cambios fenomenológicos ocurren en un subdominio pequeño y, sin embargo, se incluye como parámetro geométrico relevante toda la extensión del mismo. A su vez, es muy frecuente excluir parámetros que no se dan explícitamente en el problema (magnitudes ocultas) que juegan un papel relevante. Es común, por ejemplo, atribuir al potencial hidráulico (energía por unidad de peso) una medida en metros, atribución que al combinarse con otros parámetros físicos y/o geométricos del problema, causa una degeneración en los resultados y grupos adimensionales carentes de sentido y de significado físico (véase Martínez-Moreno [2021]). El hecho de no discriminar dimensiones entre magnitudes de carácter vectorial, incluso en ocasiones no discriminar entre magnitudes que aún con la misma dimensión juegan un papel físico diferente, conlleva a soluciones poco precisas e incluso erróneas.

- Mediante la Adimensionalización discriminada y normalizada del modelo matemático.

El procedimiento utilizado en el presente trabajo para la caracterización dimensional del problema de flujo simultáneo de calor y de fluido en un medio poroso es la adimensionalización discriminada y normalizada.

El Análisis Dimensional Discriminado (presentado por Palacios [1955]) debe distinguirse del Análisis Dimensional Clásico y, en ambos, no es necesario conocer las ecuaciones de gobierno que rigen el problema para la obtención de monomios o grupos adimensionales que lo caracterizan. Los resultados de este tipo de análisis dependen de las variables relevantes adoptadas (Palacios [1964], Alhama y Madrid [2012], Szirtes [2007]). Para conocer dichas variables, se hace necesario un conocimiento profundo del conjunto de fenómenos físicos involucrados en el proceso físico o problema.

Las ventajas del Análisis Dimensional Discriminado (en su versión de adimensionalización del modelo matemático o ecuaciones de gobierno) frente al Análisis Dimensional Clásico son, fundamentalmente las siguientes: en primer lugar, el Análisis Dimensional Discriminado proporciona un número de grupos adimensionales menor y, en segundo lugar (en algunos casos), dichos grupos adimensionales, en general, tienen un claro significado físico (Alhama y Madrid [2012]). Las fases de este análisis discriminado y normalizado son las siguientes:

1) Definir el modelo matemático del proceso de estudio. Dicho modelo está integrado por las ecuaciones de gobierno en derivadas ordinarias o parciales, a las que deben sumarse las condiciones iniciales y de contorno. A partir de sus leyes fundamentales, se debe establecer una base dimensional completa, con magnitudes dimensionalmente independientes (Alhama y Madrid (2012)).

2) Seleccionar de entre las variables que integran el modelo matemático, la lista de magnitudes relevantes. Esta lista está integrada por las variables geométricas (como puede ser la posición en el eje horizontal o la posición en el eje vertical de coordenadas), por las variables derivadas de las leyes físicas involucradas en el proceso, es decir, las constantes universales y parámetros físicos característicos. También, entre estas magnitudes relevantes, pueden introducirse magnitudes incógnitas, las cuales pasarán a formar parte, finalmente, de al menos un grupo adimensional de la solución. Debe ser una selección completa de variables, pero no más de las necesarias.

3) Una vez seleccionadas las variables dimensionales relevantes (eventualmente alguna de ellas puede ser adimensional, pero, como veremos, queda finalmente acoplada con otras dentro de cada grupo adimensional deducido), es necesario discriminarlas para deducir las fórmulas

dimensionales de las mismas en la base elegida, eligiendo las referencias adecuadas. El uso de la discriminación asegura que las referencias utilizadas para establecer las variables adimensionales sean diferentes según cada dirección espacial. Por otro lado, la normalización limita el rango de valores de las variables al intervalo [0,1]. Inicialmente se presentó la discriminación espacial en coordenadas cartesianas (Huntley [1952] y Palacios [1955]), extendiéndose posteriormente a cualquier tipo de geometría (Alhama y Madrid [2012], García-Ros y col. [2018]).

La discriminación de la geometría (dimensiones en el espacio) empleando el sistema de coordenadas cartesiano, se basa en la sustitución en la base dimensional de la magnitud fundamental longitud por otras tres magnitudes asociadas a las diferentes direcciones espaciales (Alhama y Madrid [2012]). Por ejemplo, en el caso de caracterizar dimensionalmente el flujo horizontal en un acuífero (en dos dimensiones), si se considera un sistema de ejes coordenados cartesiano (x, y) , la magnitud longitud L en la base dimensional clásica es sustituida por dos magnitudes de longitud, cuyas dimensiones están asociadas a las dos direcciones espaciales de esta geometría (L_x, L_y) .

4) Introducir las variables adimensionales (normalizadas y discriminadas) en la (o las) ecuaciones de gobierno que rigen el problema, obteniendo de esta forma las ecuaciones de gobierno adimensionales.

5) A partir de las ecuaciones adimensionales de gobierno, se puede deducir con relativa facilidad los grupos adimensionales finales. Para ello, se realizan operaciones matemáticas sencillas con los coeficientes dimensionales de las ecuaciones, siendo el número de grupos finales de cada ecuación igual al número de coeficientes dimensionales menos uno (puede aparecer el mismo grupo en dos ecuaciones distintas). Llegados a este punto es necesario separar los grupos adimensionales sin incógnitas de los grupos adimensionales con incógnitas.

6) Aplicación del teorema de pi. Según el teorema pi (Buckingham [1914]), las expresiones adimensionales de las incógnitas de mayor interés son funciones de los grupos adimensionales sin incógnitas deducidos y, eventualmente, de la posición adimensional dentro del dominio (en el caso de incógnitas que varían localmente) y del tiempo adimensional (si el problema es transitorio).

La aplicación de esta metodología garantiza el carácter adimensional de los grupos (en realidad consecuencia de la homogeneidad de la ecuación) siendo el resultado directo de equilibrar pares de términos de la ecuación en un mismo dominio físico, por lo que son grupos con un claro carácter o significado físico (aunque no único), y de orden de magnitud la unidad. Este

procedimiento ha sido aplicado con éxito en problemas de flujo y transporte de similar complejidad (Manteca Jr. y col. [2012], Cánovas y col. [2015], Seco-Nicolás y col. [2018], Sánchez-Pérez & Alhama [2020], etc.).

3.3 Método de simulación por redes

3.3.1 Introducción

Para llevar a cabo las simulaciones numéricas necesarias que permitan la comprobación de cada una de las soluciones universales obtenidas mediante la técnica de la adimensionalización discriminada y normalizada, se ha recurrido, en lugar de a programas comerciales como pueden ser MODFLOW o VS2DHI, al “Método de simulación por redes” (Horno [2002]).

El Método de simulación por redes (también denominado MESIR), es una herramienta que posibilita el estudio de cualquier proceso que pueda definirse por medio de un modelo matemático, es decir, de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales espacio-temporales a las que hay que añadir las condiciones iniciales y de contorno. El método consta de dos fases: la elaboración de un modelo en red o circuito eléctrico equivalente del proceso y la simulación del proceso mediante un programa adecuado de resolución de circuitos eléctricos que permita obtener la solución del modelo en red. En la presente tesis doctoral, los programas de resolución de circuitos eléctricos utilizados han sido Pspice y el código libre Ngspice.

Debido a que el ordenador no entiende de forma directa las derivadas parciales, el MESIR establece el problema mediante un formato de modelo en red (Horno [2002]). Por tanto, para que un modelo red sea equivalente a un proceso determinado, las ecuaciones diferenciales en diferencias finitas espaciales derivadas del modelo matemático y las ecuaciones del modelo en red para un elemento de volumen deben ser formalmente equivalentes.

La variable espacial es discretizada en diferencias finitas, mientras que la variable tiempo se mantiene continua, transformando las ecuaciones diferenciales parciales en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias para una celda elemental o volumen finito. En el MESIR, la reticulación de la variable independiente es sucesiva ya que, en primer lugar, se realiza la reticulación espacial y más tarde la temporal (ya internamente, dentro del código numérico elegido para la simulación) para resolver las ecuaciones del circuito. El modelo completo, una vez realizada la conexión entre elementos volumétricos mediante contactos eléctricos ideales, se ejecuta en el software de resolución de circuitos eléctricos. La solución obtenida, gracias a los potentes algoritmos matemáticos implementados en los códigos modernos, es (en la práctica) la solución exacta del modelo, reduciéndose los errores a la elección del tamaño de malla.

Una de las ventajas de este método es que, haciendo uso de Pspice, el intervalo de tiempo se establece automáticamente en cada iteración de acuerdo con los requisitos de estabilidad y convergencia definidos.

3.3.2 Nomenclatura específica

C	Capacidad
F_j	Fuente de flujo
F_x	Fuente de fuerza
J	Variable de flujo
L	Inductancia
R	Resistencia
X	Variable de fuerza

3.3.3 Componentes

A la red generada se vinculan un conjunto de flujos sometidos a un balance local y un conjunto de fuerzas que satisfacen el requisito de la unicidad temporal y local. Las relaciones entre flujos y fuerzas por separado son fijadas por las leyes de Kirchhoff, mientras que las relaciones entre el par conjugado flujo-fuerza (ecuaciones constitutivas) definen los elementos del circuito. Las relaciones constitutivas entre las variables de un par flujo-fuerza son denominadas monopuertas.

Tal y como aparecen descrita en el trabajo de Cánovas y col. [2012] las monopuertas pueden clasificarse en dos tipos: monopuertas activas y monopuertas pasivas. Las monopuertas pasivas son las que no generan potencia (aunque pueden disiparla y almacenarla o entregarla a la red). Dependiendo del vínculo entre las variables sometidas a la ley de corrientes de Kirchhoff y a la ley de voltajes de Kirchhoff, los diferentes tipos de monopuertas pasivas existentes son tres:

- Monopuertas resistivas.
- Monopuertas capacitivas.
- Monopuertas inductivas.

Las monopuertas resistivas son elementos de circuito asociados a una relación entre las derivadas temporales de las variables de flujo y fuerza en una misma rama, a través de una función independiente del tiempo, la resistencia R,

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{RdJ(t)}{dt} \quad 3.3.1$$

cuyo valor, despejado de esta expresión, es

$$R = \frac{dX(t)}{dJ(t)} \quad 3.3.2$$

Si la resistencia es de valor constante, la monopuerta resistiva es lineal, de acción instantánea y sin memoria. Cuando la monopuerta resistiva es no lineal, la resistencia es función de J o de X :

$$J(t) = Fr^{-1}(X) \quad 3.3.3$$

$$X(t) = Fr(J) \quad 3.3.4$$

Una monopuerta capacitiva es un elemento de circuito que relaciona la variable flujo y la derivada temporal de la variable fuerza de una misma rama mediante una función independiente del tiempo denominada capacidad C ,

$$J(t) = C \frac{dX(t)}{dt} \quad 3.3.5$$

En las monopuertas capacitivas se produce algún tipo de almacenamiento sin pérdidas y tienen memoria.

Por otra parte, las monopuertas inductivas son elementos de circuito asociados a una relación entre la variable fuerza y la derivada temporal de la variable flujo de una misma rama mediante una función independiente del tiempo, la denominada inductancia L ,

$$X(t) = L \frac{dJ(t)}{dt} \quad 3.3.6$$

En éste tipo de elemento de circuito se produce almacenamiento de la energía sin pérdidas y su estado tiene memoria.

La simbología de las monopuertas pasivas anteriormente descritas aparece reflejada en la Figura 3.3.1.

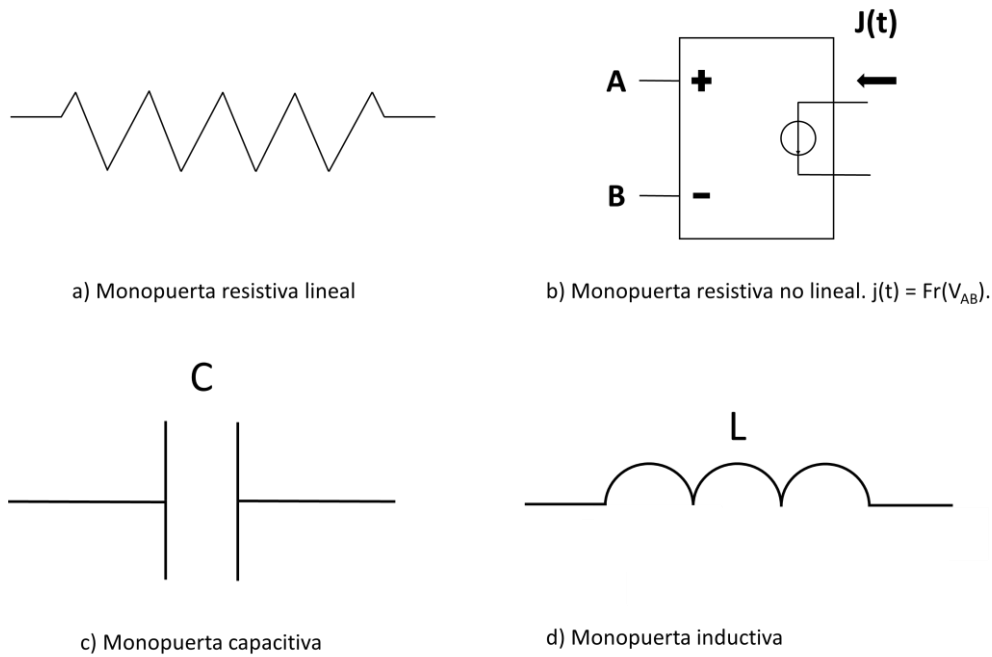


Figura 3.3.1. Tipos de monopuertas pasivas

Las monopuertas activas son las fuentes de tensión y de corriente, y generan potencia según una determinada ley. En ellas se genera una aportación o se produce una extracción de energía al sistema. Son tres los tipos de mopuertas activas:

- fuentes constantes,
- fuentes dependientes del tiempo y
- fuentes controladas.

Las relaciones constitutivas para fuentes de flujo y fuerza constante aparecen definidas en las expresiones 3.3.7 y 3.3.8, respectivamente. Tiene asignado un sentido por donde fluye la energía.

$$F_J(J) = \text{Cte} \quad 3.3.7$$

$$F_X(X) = \text{Cte} \quad 3.3.8$$

Las pilas o los generadores de corriente constante son fuentes constantes.

En el caso de fuentes dependientes del tiempo, la relación constitutiva entre las variables tiene la forma de las expresiones 3.3.9 y 3.3.10, según se trate de fuentes de fuerza o de flujo. Tiene asignado un sentido que marca la dirección del flujo de energía.

$$X = X(t) \quad 3.3.9$$

$$J = J(t) \quad 3.3.10$$

Finalmente, las fuentes controladas son monpuertas especiales asociadas a relaciones constitutivas entre variables conjugadas (o no) expresadas mediante una función que no contiene de forma explícita el tiempo. Son elementos de entrada múltiples con una única salida correspondiente a un flujo o a una fuerza dependiente de otros flujos o de otras fuerzas de distintas ramas y nudos del mismo circuito auxiliar o de un circuito auxiliar diferente. Permiten especificar acoplos energéticos de distinto tipo.

En la Figura 3.3.2 aparecen representados símbolos referentes a las monpuertas activas.

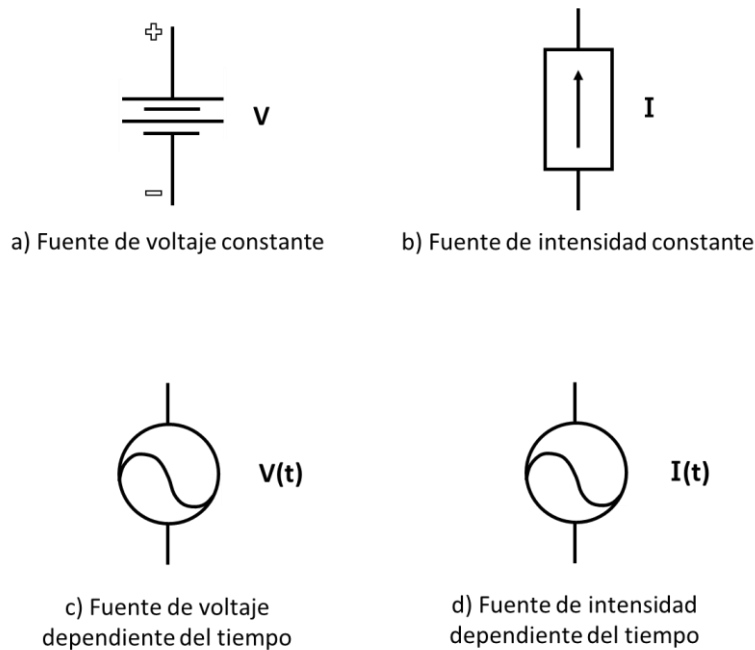


Figura 3.3.2. Simbología de diferentes monpuertas activas

3.3.4 El MESIR como técnica numérica

El diseño de modelos en red es lo más importante del método de simulación por redes ya que, si el diseño no es el apropiado, la simulación podría ser posible, por lo que se hace necesario asegurar que los resultados son coherentes realizando comprobaciones complementarias en muchos casos. Las simulaciones permiten que el método de simulación por redes sea una técnica numérica completa. El inconveniente de conocer la teoría básica de circuitos para evitar errores en el diseño del modelo en red queda ampliamente compensado con la programación de los potentes y complejos algoritmos matemáticos necesarios para realizar los cálculos numéricos. El punto de partida para el diseño de modelos en red es el modelo matemático del problema de estudio, es decir, el conjunto de ecuaciones de gobierno que han de ser discretizadas espacialmente para abordar el modelo en red de una celda o volumen elemental del medio en la geometría que se trate, siendo ésta la única manipulación directa. Una vez

realizado el diseño del modelo, es necesario conectar los extremos o nodos de cada una de las celdas con el resto de las celdas de acuerdo con la geometría del escenario. Finalmente, para obtener el modelo en red al completo, es necesario implementar las condiciones iniciales y de frontera. Este modelo en red es un fichero de entrada al programa de simulación Pspice (o Ngspace) que es el que resuelve las ecuaciones de la red, proporcionando una solución numérica. En términos generales, el número total de componentes electrónicos para el diseño del modelo en red (resistencias, condensadores, generadores, interruptores...) es elevado, aunque no así el tipo de ellos, que suele reducirse a unos pocos. Por lo tanto, para programar los modelos tan sólo es necesario aprender cierto número de reglas y de sentencias complementarias para completar el modelo. Por tanto, una de las ventajas principales de usar el MESIR en lugar de programas comerciales como pueden ser VS2DHI (Healy [1990]), SEAWAT (Guo y Langevin [2002]) y Langevin y col. [2008]) o MODFLOW (Hill y col. [2000]) es que, con unas cuantas horas de trabajo, se pueden conseguir resultados sorprendentes y del mismo tipo a los proporcionados por dichos programas. Debido a que los escenarios estudiados en esta memoria no presentan contornos ni litografías complejas, es idóneo que el trabajo de simulación se realice mediante el MESIR.

El programa Ngspace [2016] es un simulador de circuitos de código abierto que un grupo de mantenimiento sumado a la comunidad de usuarios del programa mantiene actualizado y desarrollado de forma continua. El origen de su desarrollo, al igual que para todos los códigos de resolución de circuitos es Spice (Pspace [1994]), un software comercial ampliamente utilizado en la comunidad universitaria y en empresas de ingeniería electrónica y de control. Pspace forma parte de la familia de programas de simulación de circuitos Spice 2 (Nagel [1975]), pero mucho más potente y computacionalmente rápido que sus predecesores. Spice 2 fue desarrollado por el Grupo de Circuitos Integrados del Laboratorio Electrónico de Investigación de la Universidad de California (Berkeley) en la década de los setenta. Su primera versión fue editada en el año 1972 con miles de copias distribuidas por toda América y Europa.

Finalmente, conviene mencionar que la analogía eléctrica clásica que aparece en innumerables textos antiguos y más recientes, que se aplicó experimentalmente para simulaciones muy complejas en los sesenta antes del desarrollo de los computadores modernos, está sólo parcialmente relacionada con el MESIR. Dicha analogía fue utilizada, básicamente, en problemas lineales y no acoplados.

3.4 Escenarios

3.4.1 Modelos físico y matemático

Los modelos físico y matemática de cada uno de los escenarios estudiados en el presente trabajo aparecen reflejados en las Tablas 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3 y 3.4.4.

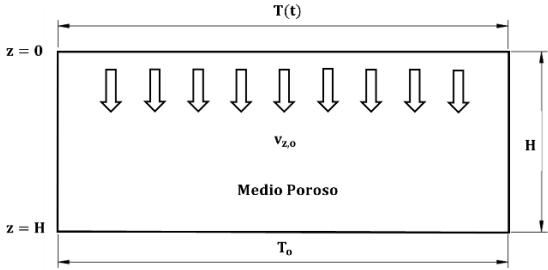
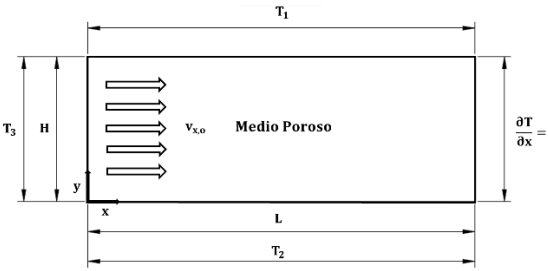
 <p>Primera aplicación: Flujo vertical</p>	<p>Ecuación de gobierno:</p> $k_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - c_{e,w} \rho_{e,w} \left(v_{z,o} \frac{\partial T}{\partial z} \right) - c_e \rho_e \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ <p>Condiciones de contorno:</p> $T_{z=0} = T_{av}$ $T_{(z=0,t)} = T_{av} + \Delta T_{z=0} \sin\left(\frac{2\pi}{\tau_o} t\right)$ $T_{z=H} = T_o$ $T_{(z,t=0)} = T_{ini}$
 <p>Segunda aplicación. Flujo horizontal</p>	<p>Ecuación de gobierno:</p> $k_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - c_{e,w} \rho_{e,w} \left(v_{x,o} \frac{\partial T}{\partial x} \right) = c_e \rho_e \frac{\partial T}{\partial t}$ <p>Condiciones de contorno:</p> $T_{(x,y=H,t)} = T_1$ $T_{(x,y=H,t)} = T_m + \Delta T \sin\left(\frac{2\pi}{\tau_o} t\right)$ $T_{(x,y=0,t)} = T_2$ $T_{(x=0,y,t)} = T_3$ $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right _{x=L} = 0$ $T_{(x,y,t=0)} = T_{ini}$

Tabla 3.4.1. Modelos físico y matemático de la primera y de la segunda aplicación

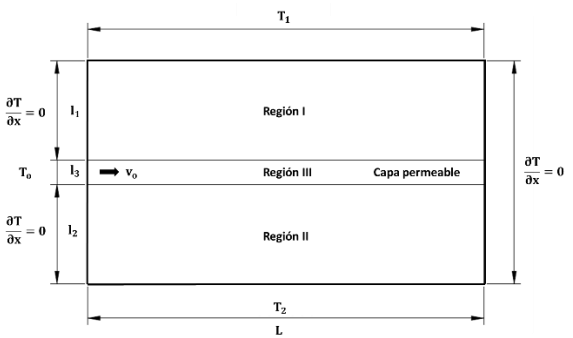
 <p style="text-align: center;">Tercera aplicación. Flujo horizontal por capa permeable</p>	<p>Ecuación de gobierno:</p> <p><u>Región I y II</u></p> $k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho_e c_e \frac{\partial T}{\partial t}$ <p><u>Región III</u></p> $k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \rho_{e,w} c_{e,w} v_0 \frac{\partial T}{\partial x} = \rho_e c_e \frac{\partial T}{\partial t}$ <p>Condiciones de contorno:</p> $T_{(x,y=0)} = T_1$ $T_{(x,y=L)} = T_2$ $T_{(0,l_1 < y < l_1+l_3)} = T_0$ $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right _{(0,0 < y < l_1)} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right _{(x \rightarrow L, 0 < y < l_1)} = 0$ $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right _{(0,l_1+l_3 < y < l_1+l_3+l_2)} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right _{(x \rightarrow L, l_1+l_3 < y < l_1+l_3+l_2)} = 0$ $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right _{(x \rightarrow \infty, l_1 < y < l_1+l_3)} = 0$
---	---

Tabla 3.4.2. Modelos físico y matemático de la tercera aplicación

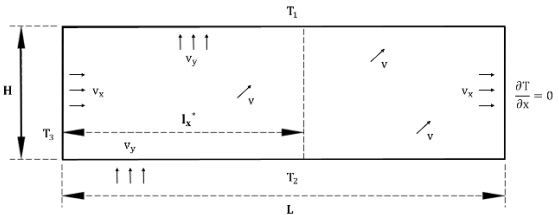
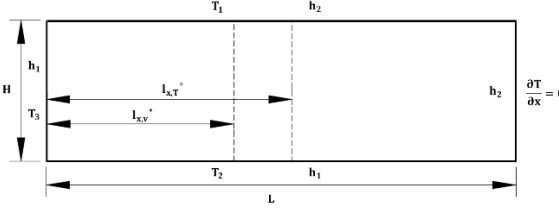
 <p>a) Flujo oblicuo velocidad constante</p>  <p>a) Flujo oblicuo potenciales constante</p> <p>Cuarta aplicación. Flujo oblicuo</p>	<p>Ecuación de gobierno:</p> <p><u>Flujo oblicuo velocidad constante</u></p> $k_{m,x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{m,y} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \rho_{e,w} c_{e,w} v_x \frac{\partial T}{\partial x} - \rho_{e,w} c_{e,w} v_y \frac{\partial T}{\partial y} = 0$ $\vec{v} = (v_x, v_y)$ <p><u>Flujo oblicuo potenciales constantes</u></p> $K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ v_x = K_x \frac{\partial h}{\partial x}; v_y = K_y \frac{\partial h}{\partial y} \end{array} \right.$ <p>Condiciones de contorno:</p> <p><u>Flujo oblicuo velocidad constante</u></p> $T_{(x,y=0)} = T_1$ $T_{(x=0,y)} = T_{(x,y=H)} = T_2$ $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right _{(x=L,y)} = 0$ <p><u>Flujo oblicuo potenciales constantes</u></p> $h_{(x=0,y)} = h_{(x,y=H)} = h_1$ $h_{(x,y=0)} = h_{(x=L,y)} = h_2$
--	---

Tabla 3.4.3. Modelos físico y matemático de la cuarta aplicación

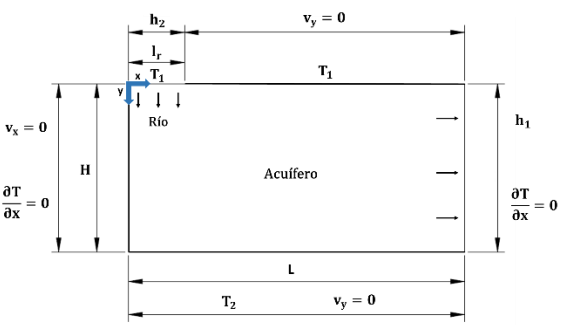
 <p>Quinta aplicación. Interacción río-acuífero</p>	<p>Ecuaciones de gobierno:</p> $k_{m,x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{m,y} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \rho_{e,w} c_{e,w} v_x \frac{\partial T}{\partial x} - \rho_{e,w} c_{e,w} v_y \frac{\partial T}{\partial y} = 0$ $K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ v_x = K_x \frac{\partial h}{\partial x}; v_y = K_y \frac{\partial h}{\partial y} \end{array} \right.$ <p>$\vec{v} = (v_x, v_y)$</p> <p>Condiciones de contorno:</p> $T_{(x,y=0)} = T_1$ $T_{(x,y=H)} = T_2$ $\frac{\partial T}{\partial x} \Big _{(x=0,y)} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{(x=L,y)} = 0$ $h_{(0 < x < l_r, y=0)} = h_2$ $h_{(L,y)} = h_1$ $\frac{\partial h}{\partial y} \Big _{(l_r \leq x \leq L, 0)} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big _{(0,y)} = \frac{\partial h}{\partial x} \Big _{(x,H)} = 0$
---	--

Tabla 3.4.4. Modelos físico y matemático de la quinta aplicación

3.4.2 Modelos en red

Nomenclatura específica

C_c	condensador conectado a masa
G_c	generador de corriente relativo al circuito de calor, conectado entre el nodo $(i, j)_T$ y masa
G_{cd}	generador de corriente relativo al circuito de calor, colocado en la mitad inferior de la celda, en paralelo a la resistencia inferior, en el escenario de flujo vertical
G_{cu}	generador de corriente colocado en la mitad superior de la celda, en paralelo a la resistencia superior, en el escenario de flujo vertical, relativo al circuito de calor,
$G_{c,h}$	generador de corriente conectado entre el nodo $(i, j)_T$ y tierra, relativo a la componente horizontal de la velocidad, en el circuito de calor
$G_{c,v}$	generador de corriente conectado entre el nodo $(i, j)_T$ y tierra, relativo a la componente vertical de la velocidad, en el circuito de calor
$(i, j)_s$	nodo central de cada celda, dentro del circuito relativo al flujo de fluido
$(i, j)_T$	nodo central de cada celda, dentro del circuito relativo al flujo de calor
$(i, j)_{xT}$	nodo central del borde izquierdo de cada celda, relativo al circuito de calor

$(i, j)_{xs}$	nodo central del borde izquierdo de cada celda, dentro del circuito relativo al flujo de fluido
$(i, j)_{yT}$	nodo central del borde inferior de cada celda, dentro del circuito relativo al flujo de calor
$(i, j)_{ys}$	nodo central del borde inferior de cada celda, dentro del circuito relativo al flujo de fluido
R_{cd}	resistencia colocada en la mitad inferior de la celda en el escenario de flujo vertical, relativa al flujo de calor
R_{cu}	resistencia colocada en la mitad superior de la celda en el escenario de flujo vertical, relativa al flujo de calor
R_{xl}	resistencia dispuesta horizontalmente (en dirección del eje x) en la mitad izquierda de la celda en escenarios 2D, relativa al flujo de calor
R_{xr}	resistencia dispuesta horizontalmente (en dirección del eje x) en la mitad derecha de la celda en escenarios 2D, relativa al flujo de calor
$R_{xl,h}$	resistencia colocada en la dirección del eje x, en la mitad izquierda de la celda en escenarios 2D, relativa al flujo de agua subterránea
$R_{xr,h}$	resistencia colocada en la dirección del eje x, en la mitad derecha de la celda en escenarios 2D, relativa al flujo de agua subterránea
$R_{yd,h}$	resistencia colocada en la dirección del eje y, en la parte inferior de la celda en escenarios 2D, relativa al flujo de agua subterránea
$R_{yu,h}$	resistencia colocada en la dirección del eje y, en la parte superior de la celda en escenarios 2D, relativa al flujo de agua subterránea
R_{yd}	resistencia colocada verticalmente (en dirección del eje y) en la parte inferior de la celda en escenarios 2D, relativa al flujo de calor
R_{yu}	resistencia colocada verticalmente (en dirección del eje y) en la parte superior de la celda en escenarios 2D, relativa al flujo de calor
V	generador de voltaje controlado por voltaje conectado a masa
V_f	pila conectada en el nodo central del borde inferior de la celda (o celdas) del fondo del dominio, relativa al circuito de temperaturas
$V_{f,h}$	pila conectada en el nodo central del borde inferior de la celda (o celdas) del fondo del dominio, perteneciente al circuito relativo al flujo de fluido
V_l	pila conectada en el nodo central del borde izquierdo de las celdas que forman el límite izquierdo del dominio, relativa al circuito de temperaturas
$V_{l,h}$	pila conectada en el nodo central del borde izquierdo de las celdas que forman el límite izquierdo del dominio, perteneciente al circuito relativo al flujo de fluido
$V_{r,h}$	pila conectada en el nodo central del borde derecho de las celdas que forman el límite derecho del dominio, perteneciente al circuito relativo al flujo de fluido
V_s	pila conectada en el nodo central del borde superior de la celda (o celdas) superior del dominio, relativa al circuito de temperaturas
$V_{s,h}$	pila conectada en el nodo central del borde superior de la celda (o celdas) superior del dominio, perteneciente al circuito relativo al flujo de fluido
$V_{s,río}$	pila conectada en el nodo central del borde superior de las celdas situadas en el río, dentro del circuito relativo al flujo de fluido
$R_{f,h}$	resistencia conectada entre masa y el nodo central del borde inferior de las celdas del fondo, relativa al flujo de agua.
R_l	resistencia conectada entre los nodos $(i, j)_{xT}$ de las celdas que integran la frontera izquierda del dominio y masa

$R_{s,h}$	Resistencia conectada entre masa y el nodo central del borde superior de las celdas de la superficie, que no forman parte del río, relativa al flujo de agua.
$T_{(i,j)_T}$	temperatura en el nodo central de la celda
Δx	ancho de cada celda en la malla (m)
Δy	longitud vertical de cada celda en la malla (m)

Flujo vertical

En primer lugar, es necesario definir los valores de los parámetros que se mantienen constantes en cada simulación. Para el escenario en el cual el flujo de agua subterránea es vertical (ya sea ascendente o descendente), los parámetros a definir son: la conductividad térmica (k_m), los calores específicos del agua y de la matriz agua-terreno ($\rho_{e,w}c_{e,w}$ y $\rho_e c_e$), la geometría del medio poroso (a partir del ancho y de la profundidad de cada celda (Δx e Δy)) y la velocidad vertical del agua subterránea ($v_{z,o}$). El número total de celdas ha sido de cien (una única columna) en todas las simulaciones realizadas.

En segundo lugar, se definen los elementos de circuito eléctrico en el interior de las celdas, así como los elementos eléctricos en las condiciones de contorno. Véase la Figura 3.4.1.

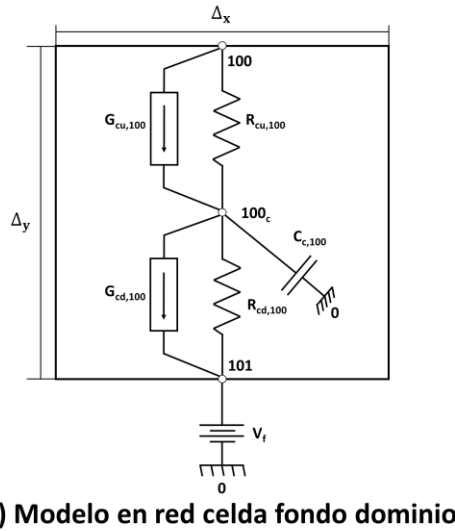
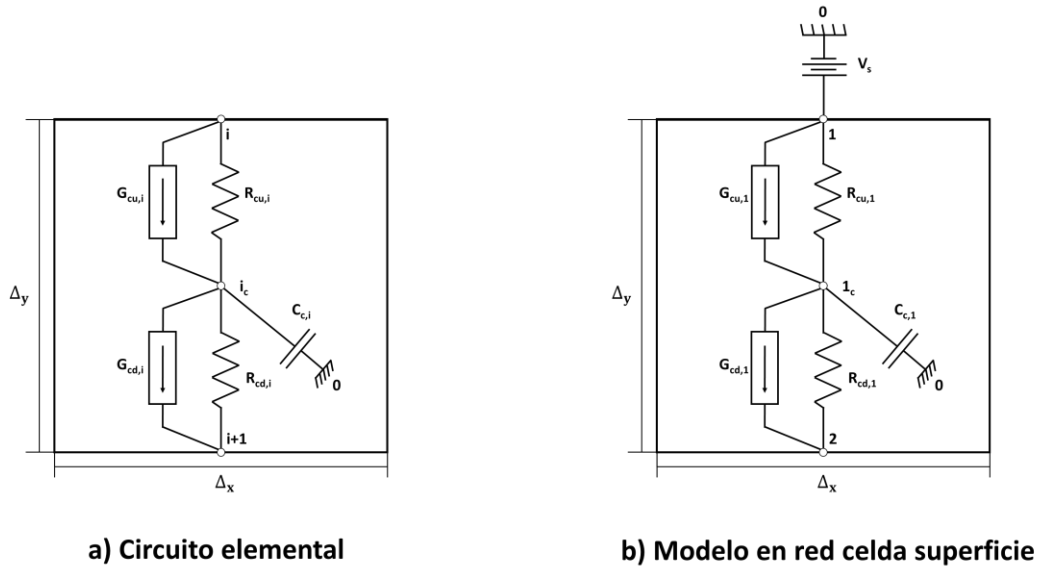


Figura 3.4.1. Circuitos celda elemental y celdas de la superficie del terreno y del fondo del dominio

Para obtener las ecuaciones de cada uno de los elementos, es necesario, en primer lugar,

discretizar espacialmente la ecuación de gobierno $k_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - c_{e,w} \rho_{e,w} \left(v_{z,o} \frac{\partial T}{\partial z} \right) - c_e \rho_e \frac{\partial T}{\partial t} = 0$:

$$k_m \left[\frac{1}{\Delta z} \left(\frac{\Delta T}{\Delta z} \Big|_{z^+} - \frac{\Delta T}{\Delta z} \Big|_{z^-} \right) \right] - c_{e,w} \rho_{e,w} v_{z,o} \frac{\Delta T}{\Delta z} - (c_e \rho_e) * \frac{dT}{dt} = 0 \quad 3.4.1$$

En segundo lugar, se debe expresar la ecuación en diferencias finitas:

$$\frac{(T)_{i+\frac{\Delta z}{2},j} - (T)_{i,j}}{\frac{(\Delta z)^2}{2k_m}} + \frac{(T)_{i,j} - (T)_{i-\frac{\Delta z}{2},j}}{\frac{(\Delta z)^2}{2k_m}} - \rho_{e,w} c_{e,w} v_{z,o} \frac{(T)_{i+\frac{\Delta z}{2},j} - (T)_{i-\frac{\Delta z}{2},j}}{\Delta z} - (\rho_e c_e) \frac{dT_{ij}}{dt} = 0 \quad 3.4.2$$

A partir de la ecuación de gobierno en diferencias finitas, se obtienen las ecuaciones de cada uno de los elementos:

$$R_{cu,i} = R_{cd,i} = \frac{(\Delta z)^2}{2 \cdot k_m} \quad 3.4.3$$

$$G_{cu,i} = \rho_{e,w} c_{e,w} \frac{v_{z,o} V(i)}{\Delta z} \quad 3.4.4$$

$$G_{cd,i} = \rho_{e,w} c_{e,w} \frac{v_{z,o} V(i+1)}{\Delta z} \quad 3.4.5$$

Por otro lado, se debe fijar la temperatura inicial de las celdas a partir de los condensadores. Las pilas situadas en la celda de la superficie y en la celda del fondo generarán un voltaje de valor constante. En los modelos en red desarrollados en la tesis, se cumple la siguiente analogía entre variables:

Flujo de calor \equiv Intensidad de corriente

Temperatura \equiv Potencial eléctrico

Por tanto, fijar un potencial eléctrico constante en la superficie del terreno y en el fondo del acuífero equivale a fijar una temperatura constante en ambas fronteras.

Flujo horizontal

Para este escenario, los parámetros a definir son: la conductividad térmica (tanto su componente horizontal ($k_{m,x}$) como su componente vertical ($k_{m,y}$)), los calores específicos del agua y de la matriz agua-terreno ($\rho_{e,w} c_{e,w}$ y $\rho_e c_e$), la geometría del medio poroso (a partir del ancho y de la profundidad de cada celda (Δx e Δy)) y la velocidad horizontal del agua subterránea ($v_{x,o}$). Para el mayor número de simulaciones realizadas el número de celdas ha sido de 200 columnas y 40 filas (8000 celdas en total).

Los elementos de circuito eléctrico en el interior de las celdas, así como los elementos eléctricos en las condiciones de contorno aparecen representados en la Figura 3.4.2.

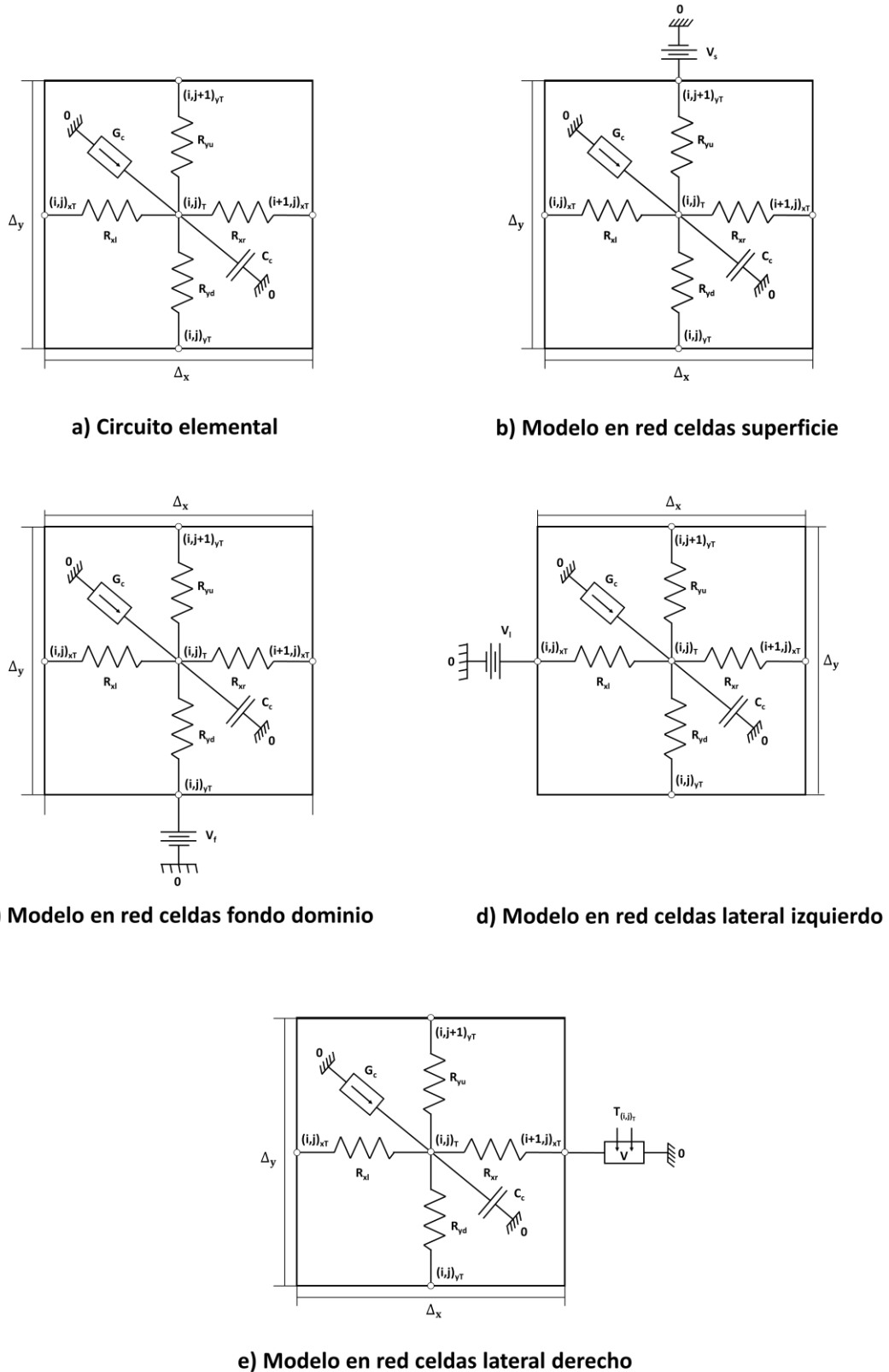


Figura 3.4.2. Circuitos celda elemental y celdas de la superficie del terreno, del borde de entrada de agua (izquierdo), del fondo del dominio y de la frontera derecha

La discretización espacial de la ecuación de gobierno para flujo horizontal $k_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \rho_{e,w} c_{e,w} \left(v_{x,o} \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho_e c_e \frac{\partial T}{\partial t}$ es:

$$k \left[\frac{1}{x} \left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \Big|_{x^+} - \frac{\Delta T}{\Delta x} \Big|_{x^-} \right) \right] + k \left[\frac{1}{y} \left(\frac{\Delta T}{\Delta y} \Big|_{y^+} - \frac{\Delta T}{\Delta y} \Big|_{y^-} \right) \right] - \left(c_{e,w} \rho_{e,w} v_{x,o} \frac{\Delta T}{\Delta x} \right) - (c_e \rho_e) \cdot \frac{dT}{dt} = 0 \quad 3.4.6$$

Por otra parte, la ecuación en diferencias finitas es:

$$\frac{(T)_{i+\frac{\Delta x}{2},j} - (T)_{i,j}}{\frac{(\Delta x)^2}{2k_{m,x}}} + \frac{(T)_{i,j} - (T)_{i-\frac{\Delta x}{2},j}}{\frac{(\Delta x)^2}{2k_{m,x}}} + \frac{(T)_{i,j+\frac{\Delta y}{2}} - (T)_{i,j}}{\frac{(\Delta y)^2}{2k_{m,y}}} + \frac{(T)_{i,j} - (T)_{i,j-\frac{\Delta y}{2}}}{\frac{(\Delta y)^2}{2k_{m,y}}} - \rho_{e,w} c_{e,w} v_{x,o} \frac{(T)_{i+\frac{\Delta x}{2},j} - (T)_{i-\frac{\Delta x}{2},j}}{\Delta x} - (\rho_e c_e) \frac{dT_{ij}}{dt} = 0 \quad 3.4.7$$

A partir de la última ecuación se obtienen las expresiones de cada uno de los elementos de circuito:

$$R_{xl} = R_{xr} = \frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot k_{m,x}} \quad 3.4.8$$

$$R_{yu} = R_{yd} = \frac{(\Delta y)^2}{2 \cdot k_{m,y}} \quad 3.4.9$$

$$G_c = \rho_{e,w} c_{e,w} \frac{v_{x,o} V((i,j)_{xT}, (i+1,j)_{xT})}{\Delta x} \quad 3.4.10$$

Finalmente, se debe fijar la temperatura inicial de cada una de las celdas haciendo uso de los condensadores. Las pilas situadas en las celdas de la superficie y en las celdas del fondo del dominio, así como las celdas del borde izquierdo (entrada de agua subterránea) son de un voltaje de valor constante durante toda la simulación. En las celdas del borde derecho del dominio se conecta un generador de voltaje controlado por voltaje para que la temperatura en el nudo $(i+1, j)_{xT}$ sea idéntica a la temperatura en el nudo $(i, j)_T$.

Capa permeable

Para este escenario, el flujo horizontal de agua subterránea tiene lugar solo a lo largo de una capa permeable situada entre dos regiones impermeables al agua (pero no al calor). Los parámetros a definir en el modelo en red, para cada una de las tres regiones, son: las componentes $k_{m,x}$ y $k_{m,y}$ de la conductividad térmica, los calores específicos del agua y de la matriz agua-terreno ($\rho_{e,w} c_{e,w}$ y $\rho_e c_e$), la geometría del medio poroso (a partir del ancho y de la profundidad de cada celda (Δx e Δy)) y la velocidad horizontal del agua que fluye por la capa permeable (v_o). El número total de celdas ha sido de cien columnas y de veinte filas (2000 celdas en total) en todas las simulaciones.

Los elementos de circuito eléctrico para las celdas de las regiones I, II y III aparecen representados en las Figuras 3.4.3 y 3.4.4.

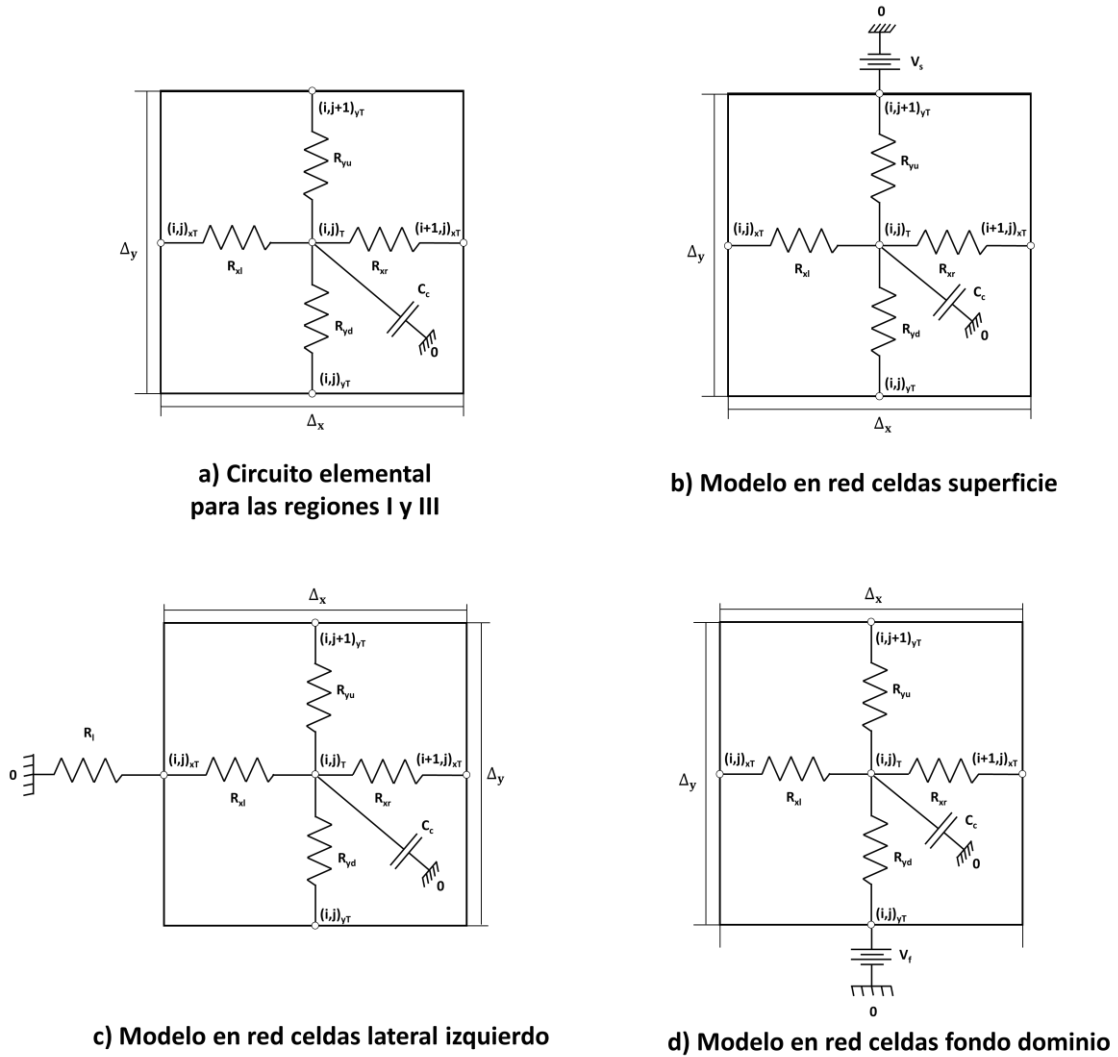


Figura 3.4.3. Circuitos celda elemental y celdas de la superficie del terreno, del borde izquierdo y del fondo del dominio de las Regiones I y III

Las expresiones de las resistencias de las celdas que forman las Regiones I y III son las siguientes:

$$R_{xl} = R_{xr} = \frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot k_{m,x}} \quad 3.4.11$$

$$R_{yu} = R_{yd} = \frac{(\Delta y)^2}{2 \cdot k_{m,y}} \quad 3.4.12$$

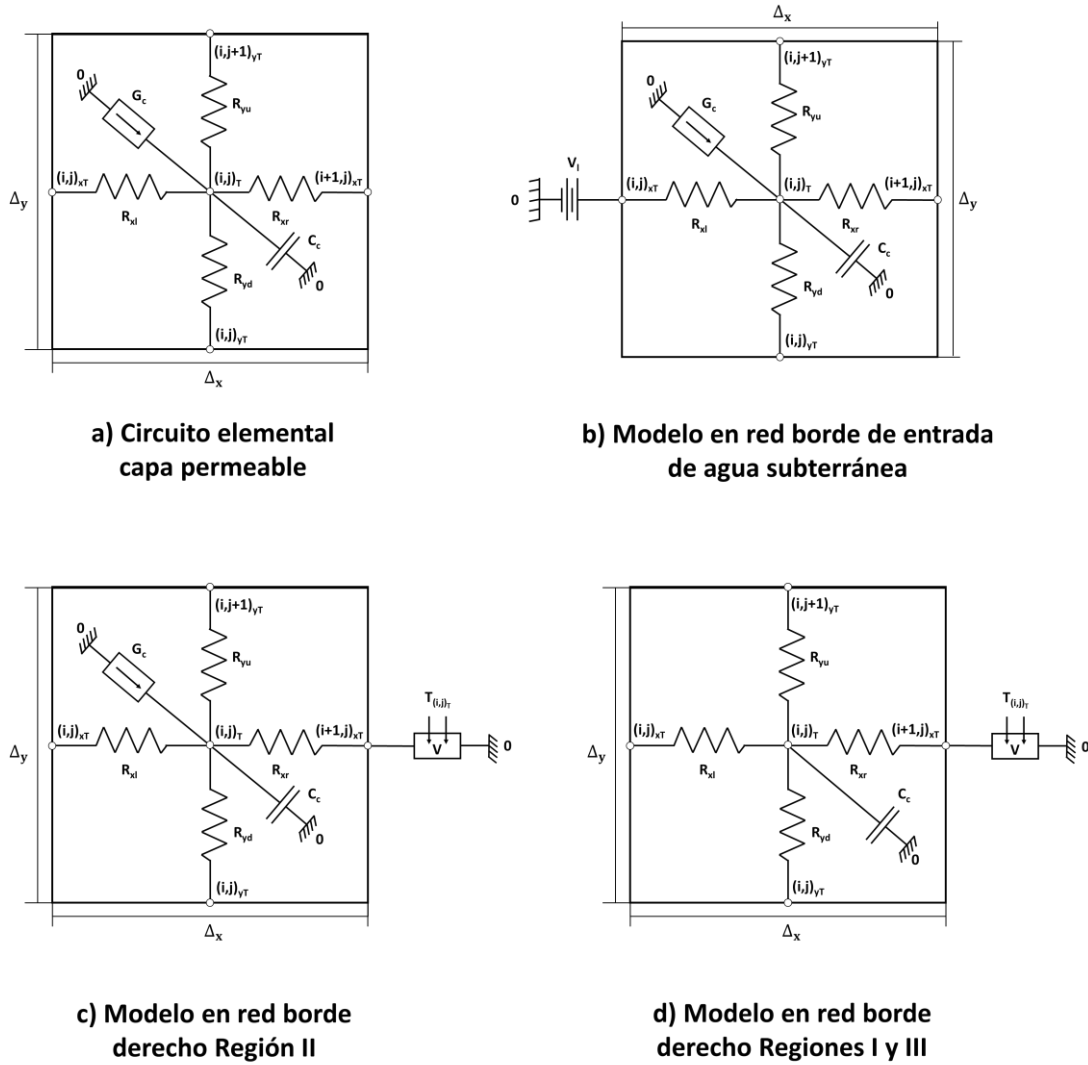


Figura 3.4.4. Circuitos celda elemental y modelo en red del borde de entrada de agua subterránea de la Región II y modelos en red de la frontera derecha del dominio (todas las regiones)

Las celdas elementales de la Región II, a diferencia de las anteriores, incorporan un generador de corriente eléctrica debido a que el flujo de agua subterránea sólo se da en la capa permeable:

$$R_{xl} = R_{xr} = \frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot k_{m,x}} \quad 3.4.13$$

$$R_{yu} = R_{yd} = \frac{(\Delta y)^2}{2 \cdot k_{m,y}} \quad 3.4.14$$

$$G_c = \rho_{e,w} C_{e,w} \frac{v_{x,0} V((i,j)_{xT}, (i+1,j)_{xT})}{\Delta x} \quad 3.4.15$$

La temperatura inicial de las celdas se fija mediante los condensadores. Las pilas situadas en las celdas de la superficie y en las celdas del fondo del dominio, así como las celdas del borde izquierdo de la Región II (entrada de agua subterránea) son de voltaje constante. Por otra parte, las celdas del borde izquierdo de las Regiones I y III se conectarán a resistencias de valor infinito

de tal forma que la temperatura alcanzada en el dominio no dependa de ellas. Al igual que ocurría en la aplicación anterior (flujo horizontal), las celdas situadas en la frontera derecha del dominio están conectadas a un generador de voltaje controlado por voltaje para que la temperatura en el nudo $(i + 1, j)_{xT}$ sea idéntica a la temperatura en el nudo $(i, j)_T$.

Flujo oblicuo de velocidad constante

En este escenario de flujo oblicuo, con componentes velocidad horizontal y vertical de valor constante, los parámetros que definen el modelo en red son: la conductividad térmica (sus componentes $k_{m,x}$ y $k_{m,y}$), los calores específicos del agua y de la matriz agua-terreno ($\rho_{e,w}c_{e,w}$ y $\rho_e c_e$), la geometría del medio poroso (a partir del ancho y de la profundidad de cada celda (Δx e Δy)) y las componentes horizontal y vertical de la velocidad del agua subterránea (v_x y v_y). El número de celdas ha sido de cien columnas y de veinte filas (2000 celdas en total) en todas las simulaciones.

Se discretiza espacialmente la ecuación de gobierno para flujo oblicuo de velocidad constante a

partir de la ecuación de gobierno $k_{m,x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{m,y} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \rho_{e,w} c_{e,w} v_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho_{e,w} c_{e,w} v_y \frac{\partial T}{\partial y} = 0$:

$$k_{m,x} \left[\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \Big|_{x^+} - \frac{\Delta T}{\Delta x} \Big|_{x^-} \right) \right] + k_{m,y} \left[\frac{1}{\Delta y} \left(\frac{\Delta T}{\Delta y} \Big|_{y^+} - \frac{\Delta T}{\Delta y} \Big|_{y^-} \right) \right] - c_{e,w} \rho_{e,w} \left(v_x \frac{\Delta T}{\Delta x} + v_y \frac{\Delta T}{\Delta y} \right) = 0 \quad 3.4.16$$

o, en términos de diferencias finitas espaciales:

$$\frac{(T)_{i+\frac{\Delta x}{2},j} - (T)_{i,j}}{\frac{(\Delta x)^2}{2k_{m,x}}} + \frac{(T)_{i,j} - (T)_{i-\frac{\Delta x}{2},j}}{\frac{(\Delta x)^2}{2k_{m,x}}} + \frac{(T)_{i,j+\frac{\Delta y}{2}} - (T)_{i,j}}{\frac{(\Delta y)^2}{2k_{m,y}}} + \frac{(T)_{i,j} - (T)_{i,j-\frac{\Delta y}{2}}}{\frac{(\Delta y)^2}{2k_{m,y}}} - \rho_{e,w} c_{e,w} v_x \frac{(T)_{i+\frac{\Delta x}{2},j} - (T)_{i-\frac{\Delta x}{2},j}}{\Delta x} - \rho_{e,w} c_{e,w} v_y \frac{(T)_{i+\frac{\Delta y}{2},j} - (T)_{i-\frac{\Delta y}{2},j}}{\Delta y} = 0 \quad 3.4.17$$

De aquí, las expresiones de cada uno de los elementos de circuito son:

$$R_{xl} = R_{xr} = \frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot k_{m,x}} \quad 3.4.18$$

$$R_{yu} = R_{yd} = \frac{(\Delta y)^2}{2 \cdot k_{m,y}} \quad 3.4.19$$

$$G_{c,h} = \rho_{e,w} c_{e,w} \frac{v_{x,o} V((i,j)_{xT}, (i+1,j)_{xT})}{\Delta x} \quad 3.4.20$$

$$G_{c,v} = \rho_{e,w} c_{e,w} \frac{v_{z,o} V((i,j+1)_{yT}, (i,j)_{yT})}{\Delta y} \quad 3.4.21$$

Al igual que en los casos anteriormente expuestos, la temperatura inicial de cada una de las celdas se fija a partir del voltaje inicial de los condensadores. Las pilas situadas en las celdas de

la superficie y en las celdas del fondo del dominio, así como las celdas del borde izquierdo del dominio (entrada de agua subterránea) generarán un voltaje de valor constante durante toda la simulación. Véase la Figura 3.4.5.

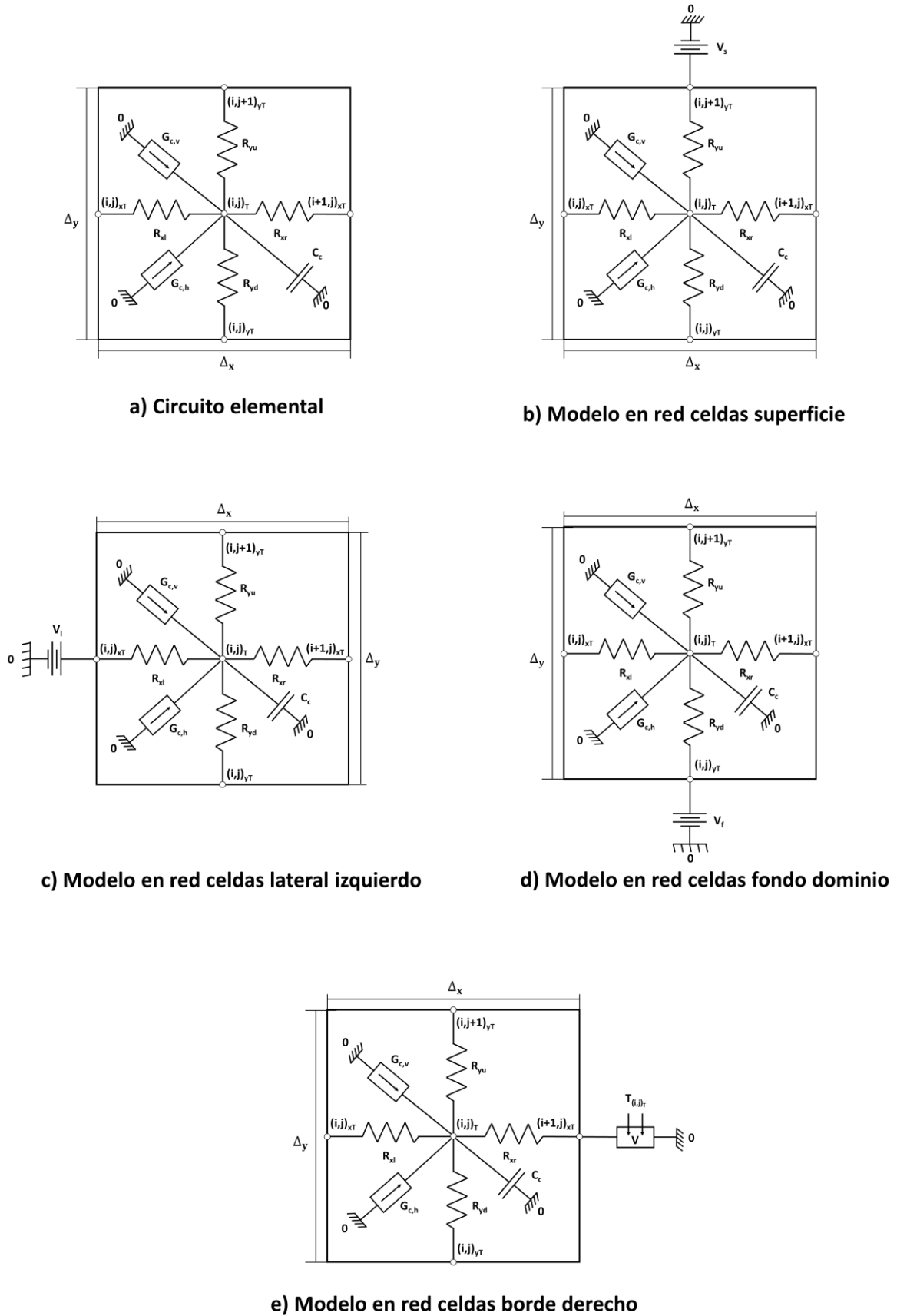


Figura 3.4.5. Circuitos celda elemental y modelo en red de las celdas de las condiciones de contorno del escenario de flujo oblicuo con velocidad constante

Finalmente, las celdas situadas en la frontera derecha del dominio (columna derecha) están conectadas a un generador de voltaje controlado por voltaje para que la temperatura en el nudo $(i + 1, j)_{xT}$ sea idéntica a la temperatura en el nudo $(i, j)_T$.

Flujo oblicuo con potenciales constantes

Para este escenario de potencial hidráulico constante en el contorno de entrada de agua, los parámetros a definir en el modelo en red son: las componentes $k_{m,x}$ y $k_{m,y}$ de la conductividad térmica, los calores específicos del agua y de la matriz agua-terreno ($\rho_{e,w}c_{e,w}$ y $\rho_e c_e$), la geometría del medio poroso y valores de los potenciales en los contornos (h_1 y h_2), como mínimo dos para definir una región de entrada y otra de salida de agua. El número total de celdas para esta simulación ha sido de doscientas columnas y veinte filas (4000 celdas en total).

El escenario, además de contar con un circuito eléctrico asociado al flujo de calor, presenta un segundo asociado al flujo de agua subterránea y que está desacoplado del primero. A diferencia de los escenarios anteriores, la velocidad del fluido no es constante, sino que depende de la posición en el medio poroso. Por lo tanto, existirá un circuito eléctrico relativo al flujo de agua subterránea que dependerá de la ecuación de gobierno:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ v_x = K_x \frac{\partial h}{\partial x} ; v_y = K_y \frac{\partial h}{\partial y} \end{array} \right.$$

Los elementos de circuito eléctrico relativos únicamente al flujo de agua subterránea son los siguientes:

$$R_{xl,h} = R_{xr,h} = \frac{\Delta x}{2K_x \Delta y} \quad 3.4.22$$

$$R_{yd,h} = R_{yu,h} = \frac{\Delta y}{2K_y \Delta x} \quad 3.4.23$$

Discretizando la ecuación de flujo simultáneo de calor y fluido y expresándola en diferencias finitas, se obtienen los elementos de circuito relativos al flujo de calor:

$$R_{xl} = R_{xr} = \frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot k_{m,x}} \quad 3.4.24$$

$$R_{yu} = R_{yd} = \frac{(\Delta y)^2}{2 \cdot k_{m,y}} \quad 3.4.25$$

$$G_{c,h} = \rho_{e,w} c_{e,w} \frac{V((i,j)_{xs},(i+1,j)_{xs})}{\Delta x / K_x} \cdot \frac{V((i,j)_{xT},(i+1,j)_{xT})}{\Delta x} \quad 3.4.26$$

$$G_{c,v} = \rho_{e,w} c_{e,w} \frac{V_{((i,j+1)_{ys},(i,j)_{ys})}}{\Delta y / K_y} \cdot \frac{V_{((i,j+1)_{yT},(i,j)_{yT})}}{\Delta y} \quad 3.4.27$$

Como se puede ver en las expresiones 3.4.26 y 3.4.27, las expresiones relativas a los generadores de corriente eléctrica asociados a la velocidad vertical y horizontal del agua subterránea, dependen de los voltajes en puntos ubicados en el circuito relativo al flujo de agua subterránea. Es el acoplamiento del problema.

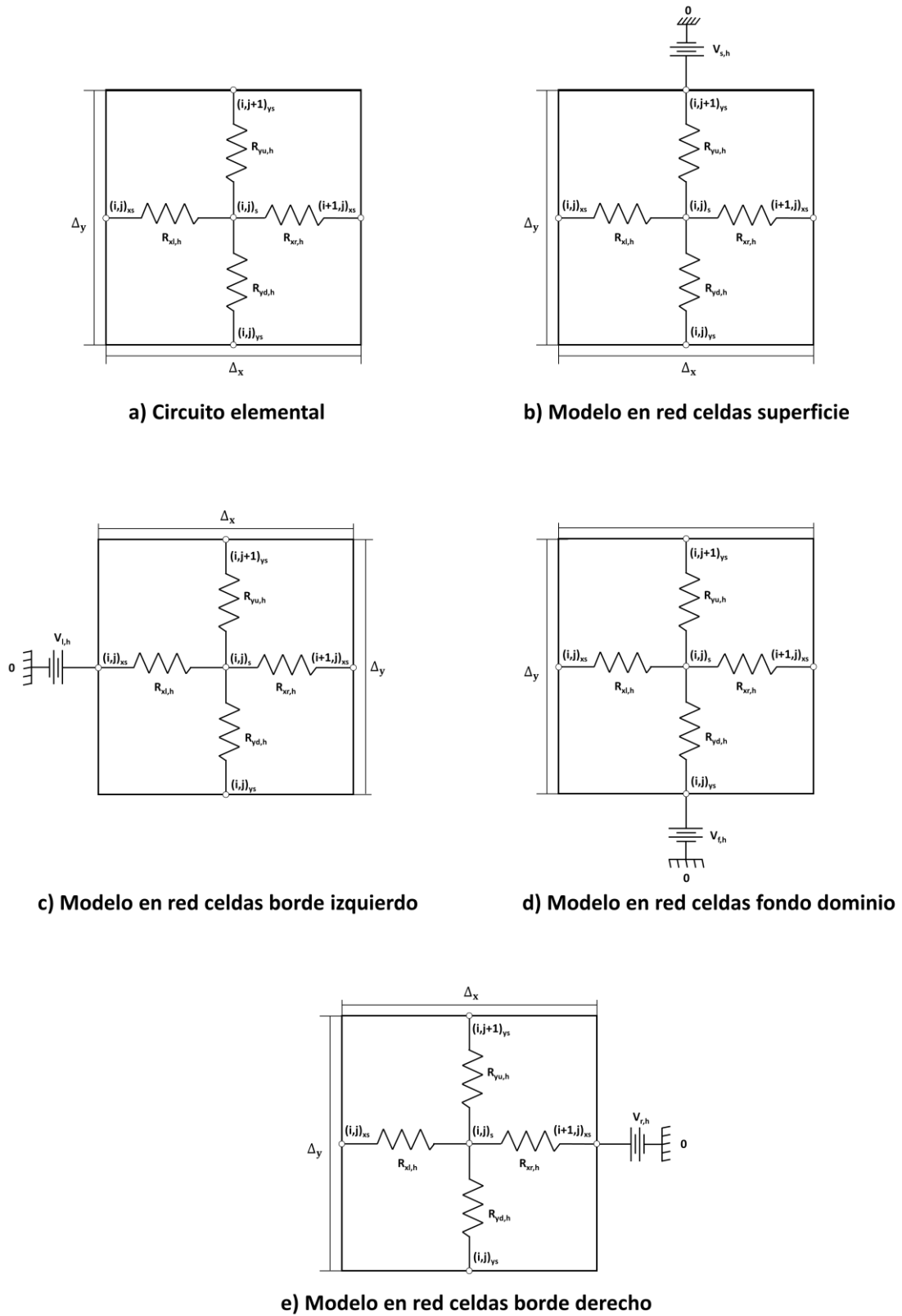


Figura 3.4.6. Circuitos celda elemental y modelo en red de las celdas de las condiciones de contorno relativos al flujo de agua subterránea en el escenario de potenciales constantes

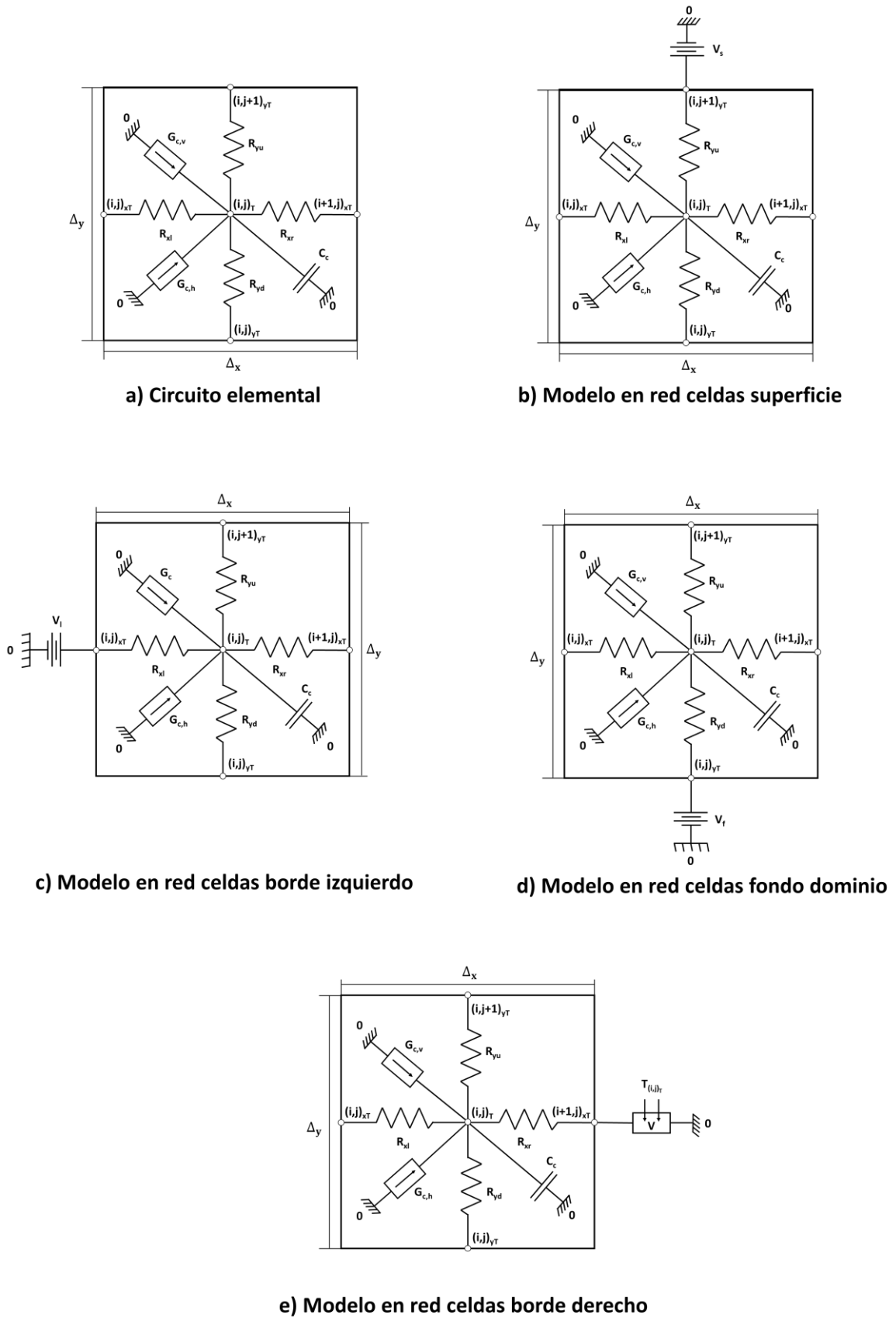


Figura 3.4.7. Circuitos celda elemental y modelo en red de las celdas de las condiciones de contorno relativos al flujo de calor en el escenario de potenciales constantes

La temperatura inicial de cada una de las celdas se fija a partir de los condensadores. Las pilas situadas en las celdas de la superficie y en las del fondo del dominio, así como en las celdas del borde izquierdo del dominio (entrada de agua subterránea) generarán un voltaje de valor constante durante toda la simulación en el circuito relativo al flujo de calor. Respecto al circuito relativo al flujo de agua subterránea, las pilas colocadas en las diferentes condiciones de contorno permiten fijar valores constantes del potencial hidráulico en dichas posiciones. Por último, las celdas situadas en la frontera derecha del dominio están conectadas a un generador de voltaje controlado por voltaje para que la temperatura en el nudo $(i + 1, j)_{xT}$ sea idéntica a la temperatura en el nudo $(i, j)_T$.

Interacción río-acuífero

En este escenario de descarga desde el acuífero al río o recarga desde el río hacia el acuífero, los parámetros a definir en el modelo en red son: las componentes de la conductividad térmica, calores específicos del agua y de la matriz agua-terreno ($\rho_{e,w}c_{e,w}$ y $\rho_e c_e$), la geometría del medio poroso y los valores de los potenciales hidráulicos en el río y en el borde derecho (borde de salida de agua) del dominio (h_1 y h_2). El número total de celdas del modelo ha sido de doscientas columnas y de cuarenta filas (8000 celdas en total).

Este escenario es, hasta cierto punto, similar al de flujo oblicuo generado por potenciales constantes en los contornos, ya que, además de contar con un circuito eléctrico asociado al flujo de calor, presenta otro (desacoplado del anterior) asociado al flujo de agua subterránea. La velocidad del fluido en este problema no es constante, ya que depende de la posición en el medio poroso. Por tanto, existirán un circuito eléctrico relativo al flujo de agua subterránea que dependerá de la siguiente ecuación de gobierno:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ v_x = K_x \frac{\partial h}{\partial x} ; v_y = K_y \frac{\partial h}{\partial y} \end{array} \right.$$

Los elementos de circuito eléctrico relativos únicamente al flujo de agua subterránea son los siguientes:

$$R_{xl,h} = R_{xr,h} = \frac{\Delta x}{2K_x \Delta y} \quad 3.4.28$$

$$R_{yd,h} = R_{yu,h} = \frac{\Delta y}{2K_y \Delta x} \quad 3.4.29$$

Discretizando a ecuación de flujo simultáneo de calor y fluido y expresándola en diferencias finitas, se obtienen los elementos de circuito relativos al flujo de calor

$$R_{xl} = R_{xr} = \frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot k_{m,x}} \quad 3.4.30$$

$$R_{yu} = R_{yd} = \frac{(\Delta y)^2}{2 \cdot k_{m,y}} \quad 3.4.31$$

$$G_{c,h} = \rho_{e,w} c_{e,w} \frac{V((i,j)_{xs},(i+1,j)_{xs})}{\Delta x/K_x} \cdot \frac{V((i,j)_{xT},(i+1,j)_{xT})}{\Delta x} \quad 3.4.32$$

$$G_{c,v} = \rho_{e,w} c_{e,w} \frac{V((i,j+1)_{ys},(i,j)_{ys})}{\Delta y/K_y} \cdot \frac{V((i,j+1)_{yT},(i,j)_{yT})}{\Delta y} \quad 3.4.33$$

Al igual que para el caso de flujo oblicuo generado por potenciales hidráulicos constantes en el contorno, las expresiones relativas a los generadores de corriente eléctrica asociados a la velocidad vertical y horizontal del agua subterránea, dependen de los voltajes en puntos correspondientes ubicados en el circuito de flujo de agua subterránea. La representación de los dos circuitos eléctricos se muestra en las Figuras 3.4.8 y 3.4.9.

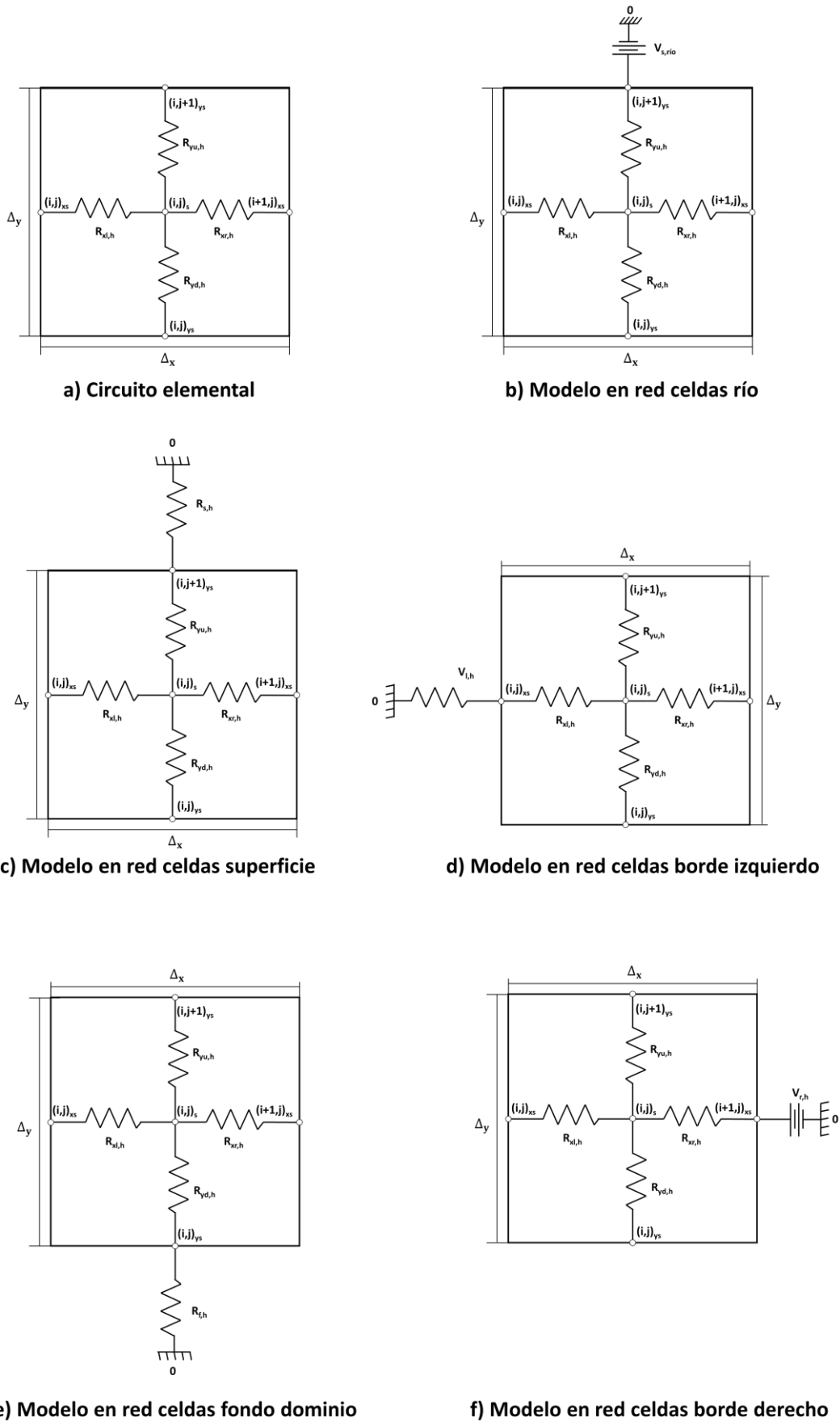


Figura 3.4.8. Circuitos celda elemental y modelo en red del circuito relativo al flujo de agua

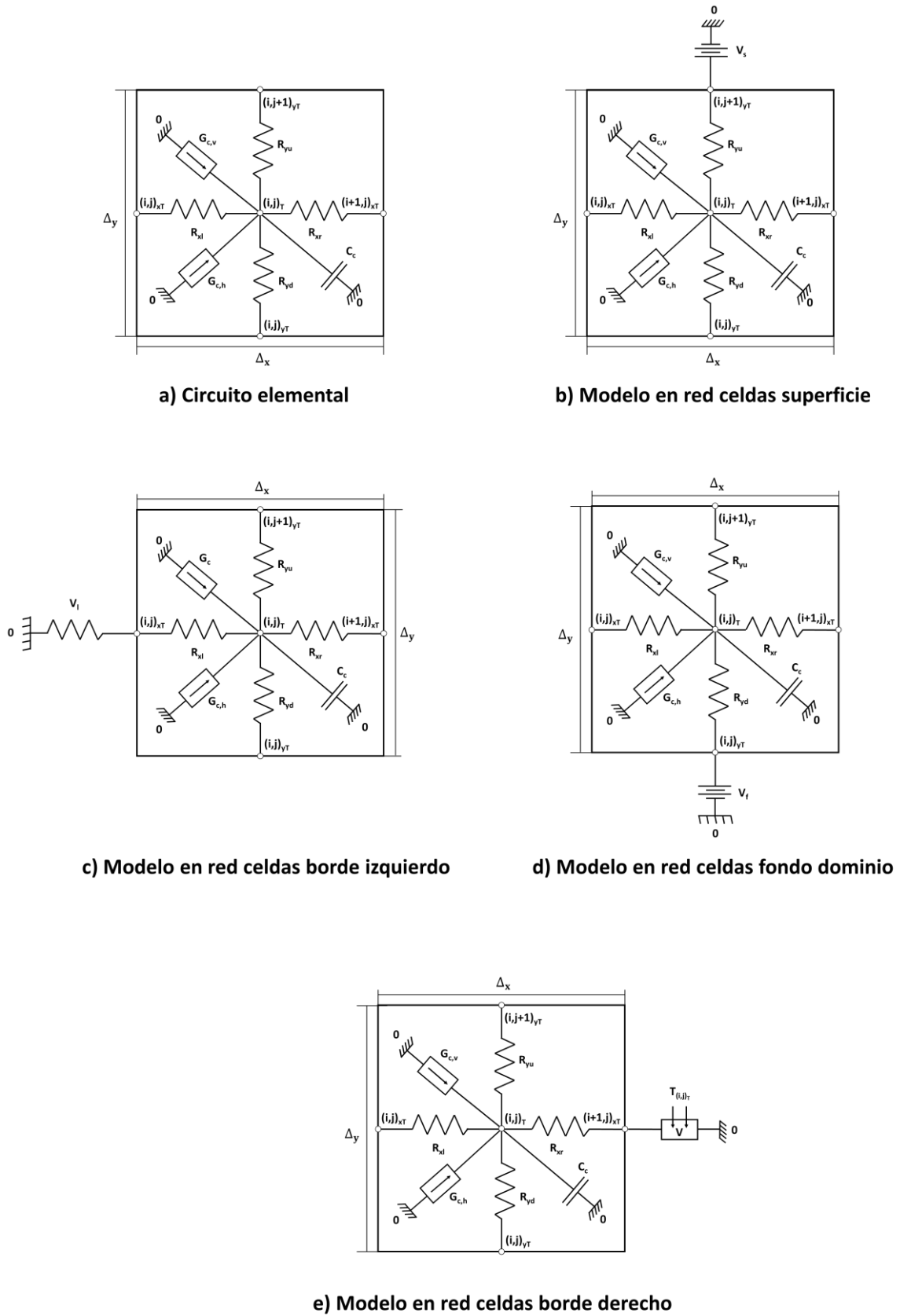


Figura 3.4.9. Circuitos celda elemental y modelo en red del circuito relativo al flujo de calor

3.5 Planteamiento del problema inverso

3.5.1. El problema inverso clásico y su solución

En un problema inverso clásico de ingeniería se conoce parte de la solución y algunos de los parámetros físicos y geométricos, y a partir de un modelo matemático que se ajuste a la fenomenología física del problema y mediante un protocolo establecido y especialmente diseñado a este fin, se estima una parte de lo que habitualmente es el enunciado. Beck [1970] sigue siendo una referencia fundamental para profundizar en el concepto de problema inverso y sus múltiples tipos. La elección del valor de los funcionales que hay que introducir en el proceso de estimación se hace, generalmente, en base a la experiencia en este tipo de problemas.

Respecto a los problemas de flujo y transporte de calor estudiados en esta memoria, se puede decir que la estimación de flujos y/u otras propiedades hidráulicas o térmicas del terreno, así como de condiciones de contorno, líneas de frontera, otros coeficientes, etc., a partir de medidas experimentales de perfiles térmicos (generalmente verticales, aunque también pueden utilizarse perfiles horizontales) en un escenario conocido, se ajusta totalmente al concepto de problema inverso clásico. La variable más difícil de estimar, y a la vez costosa de medir de forma directa, es el flujo de agua subterránea. Es frecuente estimar, de manera simultánea al flujo, las propiedades térmicas del terreno.

Para darle la importancia que, sin duda, tiene el diseño de protocolos para la solución de estos problemas, los aquí propuestos, así como sus aplicaciones, se han recogido en un capítulo separado (Capítulo 5). Para cada uno de los escenarios estudiados y ya mencionados, se diseña un protocolo específico que puede ser potencialmente extendido a la estimación de otras propiedades y parámetros.

La verificación de estos protocolos, siguiendo a Beck [1970], se lleva a cabo mediante un procedimiento teórico y clásico en el que los escenarios reales (difíciles de ser especificados con la totalidad de los parámetros físicos y geométricos necesarios) se lleva a cabo mediante un procedimiento teórico y clásico en el que los escenarios reales son sustituidos por escenarios ideales definidos mediante un modelo matemático completo. Este procedimiento se resume en los siguientes pasos:

- 1) Una vez elegido el escenario y asignado los valores de todos los parámetros y de las condiciones de contorno (es decir, los datos necesarios para plantear el problema directo), se resuelve éste numéricamente mediante un código preciso, reportando el campo de flujo y temperaturas del problema dentro del dominio (problema directo).

2) Se seleccionan líneas (verticales u horizontales, según convenga) dentro del dominio Ω , a partir de la solución anterior se tabulan los perfiles temperatura-posición en puntos regularmente distribuidos dentro de cada línea.

3) En cada perfil de los anteriores, se modifica aleatoriamente el valor de la temperatura construyendo nuevas tablas (nuevos perfiles), cada una de ellas asociada a un valor concreto de error aleatorio (0.1, 0.2, 0.5, 1, 3, ... %). Existen programas de generación de números aleatorios que son idóneos para realizar este paso. Los errores aleatorios tienen que ver con los errores típicos de los instrumentos de medición de temperatura. Las nuevas tablas, tantas como errores para cada perfil, se constituyen en la información experimental de entrada para el problema inverso.

4) Se diseña un protocolo de tanteo, generalmente complejo, mediante el cual y partiendo de unos parámetros iniciales también estimados a partir de la experiencia del investigador en problemas de flujo y transporte en aguas subterráneas, se determinan unos perfiles iniciales que se contrastan o comparan con los perfiles de las tablas del paso 3), dando valor a un funcional que recoge el promedio de las desviaciones entre pares de perfiles.

5) De acuerdo con el protocolo de tanteo del paso 4), se modifican sucesivamente los parámetros conocidos y que más influyen en la solución del problema directo hasta que la comparación entre perfiles lleve al funcional a un valor suficientemente bajo (también establecido por la experiencia). Cada modificación impone un nuevo valor al parámetro cambiante y para ello han de tomarse incrementos suficientemente pequeños para evitar la falta de convergencia en las soluciones. El número de simulaciones puede ser eventualmente grande (del orden de cientos o miles en los casos más complejos), de ahí que los tiempos de computación de este problema puedan ser muy elevados, del orden de horas o incluso más.

6) Las estimaciones finales son las correspondientes al escenario del funcional más bajo o suficientemente pequeño.

La correlación entre los errores aleatorios y los errores en las estimaciones, estos últimos determinados por comparación con sus valores del problema directo, permiten verificar hasta qué punto el protocolo propuesto es preciso y eficaz.

Hay que insistir en que el problema es una técnica compleja y requiere experiencia. El grupo investigación "simulación por redes" de la UPCT ha dirigido tesis doctorales y publicado numerosos artículos de investigación (Zueco [2003]).

3.5.2. El problema inverso a partir de soluciones universales

Las soluciones universales que se ha verificado precisas, derivadas del estudio de los escenarios de esta memoria a partir de grupos adimensionales (teorema de pi), ofrecen la oportunidad de plantear un nuevo protocolo (directo, fácil y sin necesidad de simulaciones numéricas) para la solución de problemas de tipo inverso en este campo y en cada escenario particular. Es uno de los objetivos más importantes de esta memoria que creemos se ha alcanzado con suficiente éxito. Para ello se requiere, eso sí, un número suficientemente grande de curvas y/o ábacos para los que naturalmente se han tenido que realizar innumerables simulaciones numéricas cuyos resultados permiten abordar directamente (como problema inverso) soluciones para cada escenario concreto y distintos valores de los datos de partida. En el Capítulo 5 se ilustra mediante algunos ejemplos estas aplicaciones.

Capítulo 4. Caracterización de los escenarios. Grupos adimensionales y curvas universales

- 4.1 Primera aplicación. Flujo vertical**
- 4.2 Segunda aplicación. Flujo horizontal superficial**
- 4.3 Tercera aplicación. Flujo horizontal con capa permeable sumergida**
- 4.4 Cuarta aplicación. Flujo oblicuo**
- 4.5 Quinta aplicación. Interacción río-acuífero**

En este capítulo se incluyen cinco aplicaciones que ilustran la conexión entre el campo de temperaturas, o los perfiles verticales y horizontales derivados de él, y el flujo de agua subterránea desacoplado del primero. Todo ello con el objeto de inferir la correlación existente entre ambos que, expresada de la forma más universal posible, permita estimar los flujos de agua a partir de mediciones experimentales de los perfiles térmicos, al modo de problema inverso. Para establecer la mejor correlación, se deducen los grupos adimensionales mediante la técnica de adimensionalización normalizada y discriminada del modelo matemático y se aplica el conocido teorema de pi. En cada una de las aplicaciones se obtienen resultados precisos que se traducen en soluciones universales coherentes y verificadas por medio de simulaciones a partir de las cuales se representan curvas y ábacos universales que permiten establecer un protocolo directo e inmediato para el problema inverso (Capítulo 5).

La primera aplicación, que corresponde a flujos verticales ascendentes o descendentes, es la más investigada en la literatura, presentando soluciones analíticas incluso para condiciones de temperatura armónica en la superficie del terreno. A su vez, un gran número de escenarios reales han sido estudiados haciendo uso de éstas soluciones o simulando numéricamente dichos escenarios haciendo uso de programas comerciales.

La introducción de longitudes características (desde el punto de vista térmico) permite representar estas soluciones de forma más universal para su mejor aplicación al problema inverso. Las aplicaciones siguientes, que corresponden a flujos con velocidad horizontal de valor constante y oblicuos (en los cuales son constantes las componentes de la velocidad o los potenciales hidráulicos que generan el flujo oblicuo de agua subterránea), han sido menos estudiadas en la literatura desde un punto de vista analítico. En ellas, de nuevo, la introducción de regiones características (ya sean longitudes horizontales o profundidades), permite llegar a curvas y ábacos universales para la temperatura muy susceptibles de aplicar en el problema inverso de estimación de estos flujos tanto en el transitorio como en el estado estacionario. Por último, se presenta una aplicación que estudia la interacción río-acuífero donde el campo de flujo (velocidades), definido por potenciales hidráulicos en el contorno del dominio, no es constante. Estas aplicaciones son suficientemente ilustrativas para demostrar que la técnica seguida en la metodología es muy precisa, efectiva y potencialmente útil para resolver otros escenarios en los cuales su contorno y su litografía sean regulares; un trabajo que esperamos abordar en futuras investigaciones teóricas y de casos reales.

Se ha añadido una nomenclatura específica en cada aplicación que complementa la general recogida al principio de la memoria.

4.1 Primera aplicación. Flujo vertical

4.1.1 Introducción

En medios porosos saturados con flujos de agua de velocidad constante, ascendentes o descendentes, el problema de transferencia de calor causado por las condiciones de contorno y el arrastre del fluido ha sido un tema de gran interés en el campo de la hidrogeología gracias a la posibilidad de estimar la descarga o recarga de agua entre los cuerpos de agua superficial y subterráneos (más o menos profundos), a partir de la medición de perfiles de temperatura. En particular, en acuíferos poco profundos, puede estimarse simultáneamente tanto el flujo de agua, como el espesor o profundidad total del acuífero y la difusividad térmica del terreno.

A diferencia de la lectura de flujos a partir de piezómetros, caudalímetros u otros instrumentos o métodos standard (Kalbus y col. [2006]), caros y difíciles de aplicar (Lapham [1989]), la medida directa de perfiles de temperatura para la estimación de estos flujos de agua subterránea en la forma de problema inverso es fiable y simple desde el punto de vista técnico. Son muchos los trabajos publicados en las últimas décadas, algunos de carácter teórico aplicados a acuíferos profundos (Suzuki [1960], Stallman [1965], Bredehoeft y Papadopoulos [1965], Lapham [1989] y Taniguchi [1993]), y la mayoría relacionados con aplicaciones de campo usando simulaciones numéricas (Schmidt y col. [2007], Essaid y col. [2008] y Duque y col. [2016]).

El primer autor que propuso una solución analítica en acuíferos semiconfinados bajo condiciones armónicas para la temperatura en la superficie y flujo de velocidad constante, fue Suzuki [1960]. En su solución, que asume los efectos de decaimiento y oscilación de la temperatura con la profundidad, introduce dos constantes que dependen de forma compleja de los parámetros térmicos y geométricos del problema, haciendo difícil asociar un significado físico a ninguno de ellos. Más tarde, Stallman [1965] trabaja con la solución de Suzuki e introduce dos nuevas constantes que se expresan en términos de las de Suzuki. Sin embargo, de nuevo, estas constantes son complejas y difíciles de manipular. Bredehoeft y Papadopoulos [1965] simplifican la solución de Suzuki para el caso de temperatura constante en la superficie del terreno. Estos autores introducen un ábaco universal que muestra la dependencia del campo adimensional de temperaturas en el estacionario (únicamente, lo que puede ser una limitación) con dos grupos adimensionales: la profundidad relativa (z/H) y una especie de número de Peclet ($\frac{\rho_{e,w} C_{e,w} V_{z,0} H}{k_m}$). Las líneas del ábaco presentan una curvatura apreciable para $\left| \frac{\rho_{e,w} C_{e,w} V_{z,0} H}{k_m} \right| \geq 0.5$, el límite inferior que permite detectar velocidades del fluido. Lapham [1989], usando diferencias finitas, presenta soluciones para los casos estacionario y transitorio cualquiera que sea la condición de contorno de primera clase en la superficie. Finalmente, Taniguchi [1993],

trabajando con las constantes aportadas y utilizadas por Stallman [1965], introduce un nuevo ábaco que permite la determinación directa de la velocidad del agua subterránea a partir de perfiles de temperatura, incluso (con menor precisión) para una sola medida temperatura-profundidad.

En esta aplicación, además de profundizar en los aspectos físico-matemáticos del problema, se deducen los grupos adimensionales de los que dependen las variables de mayor interés, tanto para temperatura constante como para variación armónica de tipo sinusoidal en el contorno superficial. Las soluciones deducidas para el caso de temperatura constante en la superficie, son también aplicables al caso de temperatura armónica si se toma como variable la temperatura media. Para el caso de temperatura constante en el borde superior del dominio, se determinan las dependencias de la temperatura estacionaria, el tiempo de duración del proceso (duración del transitorio) y las temperaturas durante el transitorio. Para la excitación armónica sinusoidal y acuíferos profundos, se obtienen los grupos adimensionales de los que dependen las longitudes características y la amplitud de la oscilación mientras que, para la misma excitación y acuíferos poco profundos, se obtiene la dependencia de la amplitud de la oscilación tanto para flujos nulos como de velocidad constante, ascendentes o descendentes. La distinción entre acuíferos profundos y superficiales o poco profundos bajo excitaciones armónicas de temperatura se hace desde el punto de vista térmico: si la amplitud de la oscilación sinusoidal en el fondo del acuífero es despreciable, el acuífero es caracterizado como profundo, en caso contrario, superficial (poco profundo). La emergencia de un tiempo característico en el caso de condiciones armónicas de temperatura (el periodo de la onda térmica) aumenta el número de grupos adimensionales de los que depende la amplitud de la oscilación térmica en el terreno, pero no el número de grupos de los que depende la temperatura media.

Todas las dependencias deducidas están basadas en el teorema de pi (Buckingham [1914]) pero la deducción de los grupos adimensionales en cada caso se obtiene mediante el proceso de adimensionalización discriminada y normalizada descrito en el Capítulo 2, en el que las referencias elegidas para la definición de variables adimensionales se justifican mediante razonamientos físicos. La aplicación de esta técnica, además de asegurar el carácter adimensional de los grupos (una consecuencia de la homogeneidad adimensional de las ecuaciones de gobierno), es el resultado de balances entre pares de términos (magnitudes) de la ecuación en un mismo dominio físico. Por tanto, son grupos de significado físico preciso (aunque no único) y orden de magnitud unidad. Las dependencias obtenidas se verifican mediante simulaciones numéricas de un conjunto de escenarios ilustrativo y completo. Del

mismo modo, un suficiente número de simulaciones permite representar estas dependencias mediante curvas y/o ábacos universales.

4.1.2. Nomenclatura específica

a, b, K, V	constantes presentadas por Stallman [1965] (cm^{-1})
C_1	constante
$l_{\text{dif-adv}}^*$	longitud vertical para la cual los efectos difusivos y advectivos tienen el mismo orden de magnitud en un tiempo dado (m)
$l_{z,0}^*$	longitud característica para la cual las amplitudes de oscilación tienen un valor despreciable en comparación con la amplitud de la onda en la superficie del terreno (m)
T_{av}	temperatura media en la superficie del terreno ($^{\circ}\text{C}$)
T_{max}	temperatura máxima debido a la variación sinusoidal de la temperatura ($^{\circ}\text{C}$)
T_{min}	temperatura mínima debido a la variación sinusoidal de la temperatura ($^{\circ}\text{C}$)
T_{ini}	temperatura inicial del terreno ($^{\circ}\text{C}$)
T_o	temperatura en el fondo del dominio ($^{\circ}\text{C}$)
$v_{z,0}$	velocidad vertical del agua subterránea (m/s)
α_c	difusividad térmica corregida (m^2/s)
$(\Delta T)_z$	amplitud de la onda sinusoidal en la coordenada z ($^{\circ}\text{C}$)
$(\Delta T)_{z=0}$	amplitud de la onda sinusoidal en la superficie del terreno ($z=0$) ($^{\circ}\text{C}$)
$\pi_{l_{z,0}^*}$	monomio de la longitud característica
π_{τ^*}	monomio del tiempo característico
τ_o	período de la onda sinusoidal (s)
τ^*	tiempo característico (s)
$\tau_{\text{dif-adv}}^*$	tiempo para el cual la longitud recorrida por advección es igual a la recorrida por difusión (s)
Subíndices	
$(\cdot)_{1,2,3\dots}$	denota diferentes grupos adimensionales o diferentes funciones matemáticas
$(\cdot)_{I,II \dots}$	denota diferentes grupos adimensionales

4.1.3 Modelos físico y matemático

El modelo físico, junto con las condiciones de contorno, se muestra en la Figura 4.1.1. El flujo de agua es vertical, ascendente o descendente, y su velocidad constante. Eventualmente, la temperatura en la superficie del suelo puede ser estacionalmente dependiente del tiempo.

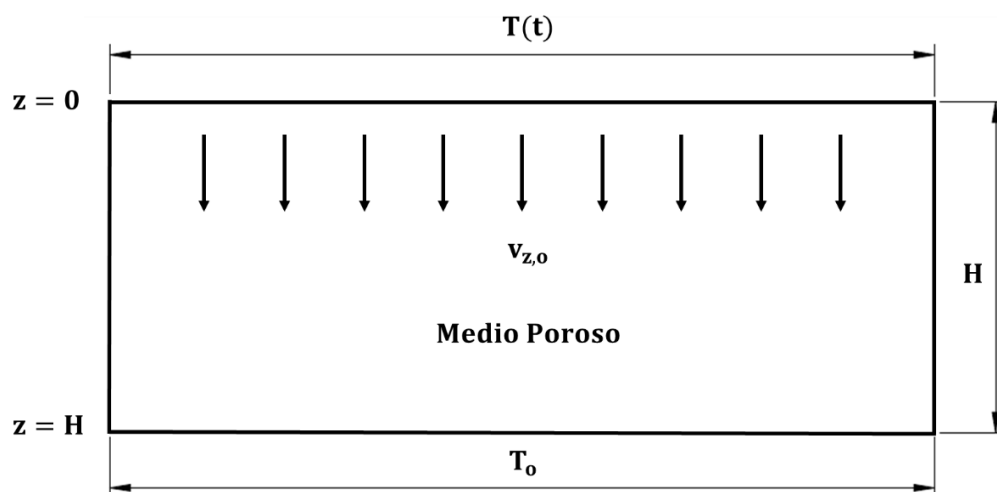


Figura 4.1.1. Esquema físico y condiciones de contorno del problema

Dado que el campo de velocidades es conocido, el modelo matemático, formado por la ecuación de transporte simultáneo de calor y de fluido y por las condiciones de contorno e iniciales, es:

$$k_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \rho_{e,w} c_{e,w} \left(v_{z,0} \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \rho_e c_e \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (4.1.1)$$

$$T_{z=0} = T_{av} \quad (4.1.2a)$$

$$T_{(z=0,t)} = T_{av} + \Delta T_{z=0} \sin \left(\frac{2\pi}{\tau_0} t \right) \quad (4.1.2b)$$

$$T_{z=H} = T_0 \quad (4.1.3)$$

$$T_{(z,t=0)} = T_{ini} \quad (4.1.4)$$

La ecuación (4.1.1) representa el balance local de flujos de calor, de difusión $k_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$, de arrastre o advección $\rho_{e,w} c_{e,w} \left(v_{z,0} \frac{\partial T}{\partial z} \right)$ y de almacenamiento $\left(\rho_e c_e \frac{\partial T}{\partial t} \right)$. La superficie del suelo está bajo una condición tipo Dirichlet de temperatura constante (4.2a), o estacionalmente dependiente del tiempo (4.2b), siendo la excitación armónica sinusoidal. Condiciones ambas que se ajustan a los escenarios reales (Taniguchi [1993] y Keery y col. [2007]). El fondo del acuífero se mantiene a temperatura constante diferente de la impuesta en la superficie, o a su valor medio en el caso estacional. Finalmente, la condición inicial, que no influye en la solución estacionaria, determina el campo transitorio de temperaturas $T(z, t)$.

4.1.4 Modelo adimensional y grupos adimensionales

Temperatura constante en la superficie. Soluciones estacionaria y transitoria

El caso estacionario reduce la ecuación de gobierno (4.1.1) a

$$k_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \rho_{e,w} c_{e,w} \left(v_{z,o} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.1.5)$$

Introduciendo en esta ecuación las variables adimensionales normalizadas (con rango de valores confinado al intervalo [0,1]) definidas en la forma

$$z' = \frac{z}{H} ; \quad T' = \frac{T - T_{av}}{T_o - T_{av}}$$

se obtiene la forma adimensional de la ecuación (4.1.5),

$$\frac{k_m (T_o - T_{av})}{H^2} \frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2} - \frac{v_{z,o} \rho_{e,w} c_{e,w} (T_o - T_{av})}{H} \frac{\partial T'}{\partial z'} = 0 \quad (4.1.6)$$

Reagrupando los coeficientes, simplificando e introduciendo el parámetro coeficiente de

difusividad corregida, α_c , definido como $\alpha_c = \frac{k_m}{\rho_{e,w} c_{e,w}} = \frac{k_m}{c_{e,w} \rho_e} \frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} = \alpha \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)$, la ecuación (4.1.6) queda en la forma

$$\frac{\alpha}{H} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right) \frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2} - v_{z,o} \frac{\partial T'}{\partial z'} = 0 \quad (4.1.7)$$

Promediando los factores de primera y segunda derivadas en todo el dominio, merced a la normalización de las variables (Bejan [2013] y Madrid y Alhama [2006]), el grupo adimensional que interviene en todas las soluciones del problema es

$$\pi_1 = \frac{\alpha_c}{v_{z,o} H} = \frac{\alpha}{v_{z,o} H} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right) \quad (4.1.8a)$$

El significado físico de este grupo es justo el balance entre los efectos o términos de difusión y advección, con un coeficiente de difusividad que corrige el de la matriz del suelo saturado debido al hecho de que el calor es arrastrado sólo por la fase del agua. Este grupo tiene diferentes, pero de algún modo equivalentes, interpretaciones físicas. Por ejemplo, escrito en la forma

$$\pi_1 = \frac{\frac{H}{v_{z,o}} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)}{\frac{H^2}{\alpha}} = \frac{\alpha}{v_{z,o} H} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right) \quad (4.1.8b)$$

significa el cociente entre dos tiempos cuyos órdenes de magnitud son: i) el denominador, $\frac{H^2}{\alpha}$, es el tiempo requerido por el agua para recorrer el dominio completo H por difusión y, ii) el numerador, $\frac{H}{v_{z,o}} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)$, el tiempo requerido por el fluido para recorrer el mismo espacio animado de la velocidad de arrastre, $\frac{H}{v_{z,o}}$, corregido por el cociente entre calores específicos

$\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}}$. El primer tiempo se obtiene de la forma dimensional de la ecuación (4.1.1) sin el término

de advección, mientras que el segundo se obtiene de esa misma ecuación sin el término de difusión. Un valor de π_1 cercano a la unidad implica el mismo orden de magnitud para estos tiempos, dando lugar a perfiles de temperatura débilmente curvos mientras que valores de π_1 de un orden de magnitud inferior (predominancia de los efectos de advección frente a los de conducción) dan lugar a perfiles de curvatura acusada. Finalmente, valores de π_1 de orden de magnitud superior a la unidad (predominancia de los efectos de difusión) dan lugar a perfiles de pendiente constante.

Es posible asignar otros significados físicos al monomio π_1 . Por ejemplo, asumiendo que H es suficientemente grande, investiguemos la longitud vertical $l_{\text{dif-adv}}^*$ (una magnitud oculta del problema) para la cual los efectos de conducción y arrastre influyen más o menos por igual durante el tiempo $\tau_{\text{dif-adv}}^*$ (también una magnitud oculta). Sustituyendo H por $l_{\text{dif-adv}}^*$ en la ecuación dimensional, es inmediato deducir las siguientes expresiones para $l_{\text{dif-adv}}^*$ y $\tau_{\text{dif-adv}}^*$:

$$l_{\text{dif-adv}}^* \sim \frac{\alpha}{v_{z,0}} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right) \quad (4.1.9)$$

$$\tau_{\text{dif-adv}}^* \sim \frac{l_{\text{dif-adv}}^* \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)}{v_{z,0}} \sim \frac{(l_{\text{dif-adv}}^*)^2}{\alpha} \quad (4.1.10)$$

De esta forma, π_1 no es más que una comparación entre la profundidad total del acuífero (H) y la longitud característica $l_{\text{dif-adv}}^*$, $\pi_1 = \frac{l_{\text{dif-adv}}^*}{H}$. En este sentido, los acuíferos podrían clasificarse a partir de la comparación entre las profundidades H y $l_{\text{dif-adv}}^*$. Así lo haremos asumiendo que, en los casos reales, el cociente $\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}}$ es aproximadamente la unidad, α tiene un valor de alrededor de 10^{-6} m²/s, y $v_{z,0}$ puede cubrir un gran intervalo de valores [10^{-4} , 10^{-7}] m/s. Con ello, los valores extremos de $l_{\text{dif-adv}}^*$ y $\tau_{\text{dif-adv}}^*$ son:

$$l_{\text{dif-adv}}^* \sim \frac{10^{-6}}{10^{-4}} = 0.01 \text{ m}, \quad \tau_{\text{dif-adv}}^* \sim \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 100 \text{ s} \quad \text{para velocidades grandes, y}$$

$$l_{\text{dif-adv}}^* \sim \frac{10^{-6}}{10^{-7}} = 10 \text{ m}, \quad \tau_{\text{dif-adv}}^* \sim \frac{10^2}{10^{-6}} = 10^8 \text{ s} \quad \text{para velocidades pequeñas}$$

Para velocidades grandes, π_1 tiene un orden de magnitud inferior a la unidad y los efectos de difusión pueden hacerse despreciables en comparación, pero para velocidades pequeñas, π_1 puede alcanzar órdenes de magnitud por encima de la unidad lo que da lugar a perfiles cuasi lineales en los que predominan los efectos de difusión frente a los de advección. En el último caso, la solución estacionaria podría alcanzarse tras un tiempo relativamente largo (del orden de años o más) que llamaremos τ^* .

Con todo, aplicando el teorema de pi, la solución estacionaria del perfil de temperaturas expresado en su forma adimensional, lo que llamaremos patrón estacionario $(T' - z')_{\text{perfil}}$, depende de π_1 , esto es, $(T' - z')_{\text{perfil}} = \Psi(\pi_1)$, o

$$(T' - z')_{\text{perfil}} = \Psi_1 \left\{ \frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right) \right\} \quad (4.1.11)$$

con Ψ_1 una función desconocida de su argumento. La forma adimensional de T' definida como

$$T'(z) = \frac{T(z) - T_{av}}{T_o - T_{av}}$$

es, asimismo, una función del monomio $\frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)$ pero también de la profundidad adimensional $z' = z/H$. Esto es,

$$T'(z) = \frac{T(z) - T_{av}}{T_o - T_{av}} = \Psi_2 \left\{ \frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right), \frac{z}{H} \right\} \quad (\text{Ábaco universal A}) \quad (4.1.12)$$

Esta solución, excepto por el factor de corrección $\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}}$, coincide con la dependencia expresada por la solución analítica de Bredehoeft y Papadopulos [1965] para el caso más sencillo que asume la hipótesis $\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} = 1$. La solución estacionaria requiere que, tras el salto térmico en la superficie, debe transcurrir un tiempo del orden del tiempo característico ya mencionado, τ^* . Definiendo el tiempo adimensional en la forma $t' = \frac{t}{\tau^*}$, e introduciéndolo en la ecuación (4.1.1), la ecuación de gobierno adimensional para el transitorio es

$$\frac{\alpha}{H^2} \frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2} - \frac{v_{z,0}}{H} \left(\frac{\rho_{e,w} c_{e,w}}{\rho_e c_e} \right) \frac{\partial T'}{\partial z'} = \frac{1}{\tau^*} \frac{\partial T'}{\partial t'} \quad (4.1.13)$$

Los grupos adimensionales que rigen la solución de este problema son

$$\pi_1 = \frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right) \quad \gamma \quad \pi_{\tau^*} = \frac{v_{z,0}}{H} \left(\frac{\rho_{e,w} c_{e,w}}{\rho_e c_e} \right) \tau^* \quad (4.1.14)$$

el segundo, la forma adimensional de la incógnita τ^* . De acuerdo con el teorema de pi, la solución para este tiempo es $\pi_{\tau^*} = \Psi(\pi_1)$, o

$$\tau^* = \frac{H}{v_{z,0}} \frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \Psi_3 \left\{ \frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right) \right\} \quad (4.1.15)$$

Merced a que el cociente entre calores específicos $\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}}$ es muy cercano a la unidad en la mayor parte de los suelos, Ψ_3 puede considerarse una función (de argumento $\frac{\alpha}{v_{z,0}H}$) que modula

un tiempo característico de valor $\frac{H}{v_{z,0}}$. Eligiendo el par de grupos independientes (deducidos de los anteriores), $\pi_1 = \frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)$ y $\pi_{\tau^*} = \frac{H^2}{\alpha \tau^*}$, la solución para τ^* puede ser escrita alternativamente en la forma

$$\tau^* = \frac{H^2}{\alpha} \Psi_4 \left\{ \frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right) \right\} \quad (\text{Curva universal B}) \quad (4.1.16)$$

Las expresiones (4.1.15) y (4.1.16) se concretan mediante la adopción de un criterio para definir el tiempo τ^* . Por ejemplo, el tiempo requerido para alcanzar el 90 (95 ó 99) % de la temperatura estacionaria adimensional. El perfil adimensional de temperaturas $(T' - z')_{\text{perfil}}$, sólo depende del tiempo $t' = t/\tau^*$, ($0 < t' < 1$) ya que la influencia del monomio π_1 está ya recogida en la expresión de τ^* ,

$$(T' - z')_{\text{perfil}} = \Psi_5 \left\{ \frac{t}{\tau^*} \right\} \quad (4.1.17)$$

mientras que la temperatura a cada profundidad se expresa en la forma

$$T'(z, t) = \frac{T(z) - T_{av}}{T_0 - T_{av}} = \Psi_6 \left\{ \frac{z}{H}, \frac{t}{\tau^*} \right\} \quad (\text{Ábaco universal C}) \quad (4.1.18)$$

Las expresiones anteriores son aplicables a todos los acuíferos sin distinción entre superficiales y profundos desde el punto de vista de la temperatura, debido a que la temperatura en la superficie del terreno se considera constante, que es igual a trabajar con la temperatura media del terreno.

Temperatura armónica en la superficie. Solución pseudo-estacionaria

En general, este escenario asume una temperatura de tipo sinusoidal en la superficie del terreno, la cual coincide con el nivel freático, y una temperatura constante en el fondo igual o diferente a la temperatura media en la superficie (Stallman [1965], Cartwright [1971] y Taniguchi [1993]). El modelo matemático es el descrito por las ecuaciones (4.1.1), (4.1.2b) y (4.1.3). El período de la onda sinusoidal es de un día o un año para las aplicaciones hidrológicas. Suzuki [1960] aporta la siguiente solución cuasi estacionaria, con periodo y amplitud constante a cada profundidad:

$$T - T_{av} = \Delta T_{z=0} e^{-az} \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau_0} - bz \right) \quad (4.1.19)$$

siendo "a" y "b" constantes de valores (Stallman [1965]):

$$a = \left[\left(K^2 + \frac{V^4}{4} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{V^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} - V \quad (4.1.20)$$

$$b = \left[\left(K^2 + \frac{V^4}{4} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{V^2}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.1.21)$$

$$\text{siendo } K = \frac{\pi \rho_e c_e}{k_m \tau_o} \text{ y } V = \frac{v_{z,o} \rho_e c_{e,w}}{2k_m}.$$

El caso de flujo nulo ($v_{z,o} = 0$).

La ecuación de gobierno es la de difusión de calor con difusividad constante, una ecuación lineal cuyas soluciones para un gran número de tipos de condiciones de contorno pueden encontrarse en Carslaw y Jeager [1959]. Para escenarios suficientemente profundos, una vez se ha alcanzado en estado cuasi estacionario armónico, existe una longitud o profundidad característica ($l_{z,o}^*$) a partir de la cual las oscilaciones tienen una amplitud despreciable en comparación con la amplitud de la onda en la superficie del terreno (por ejemplo el 1 ó 5 % de la amplitud en la superficie). Cuanto más grande sea el periodo de la onda (τ_o), mayor es la amplitud de la misma en cada profundidad $z < l_{z,o}^*$. Así, las variaciones térmicas en la superficie sólo afectan a una región del dominio de espesor aproximadamente $l_{z,o}^*$. En cada elevación, el flujo de calor vertical será alternativamente ascendente y descendente, disminuyendo con la profundidad alrededor de un valor medio que depende de la relación entre las temperaturas T_{av} y T_o .

Para investigar los grupos adimensionales que rigen la solución de este caso, la condición de contorno en la superficie puede separarse (basado en la superposición) en dos partes: un salto en escalón de valor $T_{av} - T_o$ y una variación armónica de amplitud $\Delta T_{z=0}$. La solución del perfil estacionario, es lineal como hemos visto, mientras que la dependencia de ΔT con la profundidad z (ΔT_z) es independiente del valor medio de la onda y puede deducirse del modelo armónico con la condición de simetría térmica $T_{av} = T_o$. Para encontrar los grupos adimensionales de los que depende ΔT , introducimos en la ecuación de gobierno (4.1.1.) sin el término de advección,

$$k_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - c_e \rho_e \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \text{ las siguientes variables adimensionales}$$

$$z' = \frac{z}{l_{z,o}^*} \quad ; \quad t' = \frac{t}{\tau_o} \quad ; \quad T' = \frac{\Delta T_z}{\Delta T_{z=0}}$$

donde una de las referencias elegidas ($l_{z,o}^*$) es una magnitud oculta. La forma adimensional de la ecuación es

$$\rho_e c_e \frac{\Delta T_{z=0}}{\tau_o} \frac{\partial T'}{\partial t'} = k_m \frac{\Delta T_{z=0}}{(l_{z,o}^*)^2} \frac{\partial^2 T'}{(\partial z')^2} \quad (4.1.22)$$

El único grupo adimensional que puede deducirse de ella,

$$\pi_3 = \frac{\rho_e c_e (l_{z,0}^*)^2}{k_m \tau_0} = \frac{(l_{z,0}^*)^2}{\alpha \tau_0} \quad (4.1.23)$$

Proporciona el orden de magnitud de $l_{z,0}^*$, pudiendo escribirse en forma de igualdad eligiendo un criterio para definir $l_{z,0}^*$. Por ejemplo, la profundidad a la cual ΔT_z ha caído al 5% (o 1%) de su valor en la superficie,

$$l_{z,0}^* \sim \sqrt{\alpha \tau_0} = C_1 \sqrt{\alpha \tau_0} \quad (v_{z,0} = 0) \quad (4.1.24)$$

Con C_1 una constante numérica adimensional cuyo valor es $C_{1(5\%)} = 1.67$. En acuíferos superficiales donde la profundidad $H < l_{z,0}^*$, la propia profundidad del acuífero se convierte en una magnitud relevante que debe usarse como referencia para adimensionalizar z , siendo $z' = z/H$. Eso conduce a la forma adimensional de la ecuación de gobierno

$$\rho_e c_e \frac{\Delta T_{z=0} \partial T'}{\tau_0 \partial t'} = k_m \frac{\Delta T_{z=0} \partial^2 T'}{(H)^2 (\partial z')^2} \quad (4.1.25)$$

y a un único grupo adimensional, $\pi_2 = \frac{\rho_e c_e H^2}{k_m \tau_0} = \frac{H^2}{\alpha \tau_0}$, del cual dependen todas las soluciones de tipo armónico. En suma, por aplicación del teorema de pi, la amplitud ΔT_z a cada nivel de profundidad:

Acuíferos profundos ($H > l_{z,0}^*$):

$$(\Delta T')_z = \frac{(\Delta T)_z}{(\Delta T)_{z=0}} = \Psi \left(\frac{z}{l_{z,0}^*} \right) = \Psi_7 \left(\frac{z}{\sqrt{\alpha \tau_0}} \right) \quad (\text{Curva universal D}) \quad (4.1.26)$$

Acuíferos superficiales ($H < l_{z,0}^*$):

$$(\Delta T')_z = \frac{(\Delta T)_z}{(\Delta T)_{z=0}} = \Psi_8 \left(\frac{H^2}{\alpha \tau_0}, \frac{z}{H} \right) \quad (\text{Ábaco universal E}) \quad (4.1.27)$$

El caso de flujo de velocidad constante ($v_{z,0} \neq 0$).

Para un acuífero profundo, existe una longitud característica ($l_{z,0}^*$) a partir de la cual la amplitud de la oscilación sinusoidal ΔT es despreciable. En este dominio ($z < l_{z,0}^*$), el perfil de temperaturas medias, una vez transcurrido el transitorio inicial, es curvo. Asumimos que ante excitaciones sinusoidales, las envolventes de T_{\max} y T_{\min} , en la región $z < l_{z,0}^*$, son igualmente simétricas respecto al perfil de temperaturas medias. De la misma forma que para el caso $v_{z,0} = 0$, se deducen los grupos adimensionales a partir de los problemas separados de excitación

armónica pura y salto en escalón (temperatura constante en la superficie), cuyos resultados son válidos tanto para acuíferos superficiales como para profundos.

Para excitaciones armónicas sinusoidales, se presentan las siguientes variables adimensionales:

$$z' = \frac{z}{l_{z,o}^*} \quad ; \quad t' = \frac{t}{\tau_o} \quad ; \quad T' = \frac{T - T_{av}}{T_o - T_{av}}$$

Introduciendo estas variables adimensionales en la ecuación de gobierno (4.1.1), se obtiene su forma adimensional

$$k_m \frac{(T_o - T_{av}) \partial^2 T'}{(l_{z,o}^*)^2 (\partial z')^2} - v_{z,o} \rho_{e,w} c_{e,w} \frac{(T_o - T_{av}) \partial T'}{l_{z,o}^* \partial z'} = \rho_e c_e \frac{(T_o - T_{av}) \partial T'}{\tau_o \partial t'} \quad (4.1.28)$$

Los coeficientes dimensionales de esta ecuación, $\frac{\rho_e c_e}{\tau_o}$, $\frac{k_m}{(l_{z,o}^*)^2}$ y $\frac{v_{z,o} \rho_{e,w} c_{e,w}}{l_{z,o}^*}$, dan lugar a los monomios o grupos adimensionales

$$\pi_4 = \frac{\rho_e c_e (l_{z,o}^*)^2}{k_m \tau_o} = \frac{(l_{z,o}^*)^2}{\alpha \tau_o} \quad \text{y} \quad \pi_5 = \frac{k_m}{(l_{z,o}^*)^2} \frac{l_{z,o}^*}{v_{z,o} \rho_{e,w} c_{e,w}} = \frac{k_m}{l_{z,o}^* v_{z,o} \rho_{e,w} c_{e,w}} = \frac{\alpha_c}{l_{z,o}^* v_{z,o}} \quad (4.1.29)$$

Los significados físicos de estos monomios son: π_4 es el balance entre almacenamiento y difusión de calor, y π_5 es el balance entre advección y difusión de calor. Extrayendo la longitud característica $l_{z,o}^*$ de uno de ellos, los monomios π_4 y π_5 se reducen a un nuevo par equivalente de grupos, uno de ellos sin la incógnita $l_{z,o}^*$, (es un procedimiento habitual que permite manipular los grupos para obtener nuevos conjuntos equivalentes de mayor conveniencia, en particular conjuntos en los que cada incógnita esté contenida en un solo grupo)

$$\pi_I = \frac{\rho_e c_e (l_{z,o}^*)^2}{k_m \tau_o} = \frac{(l_{z,o}^*)^2}{\alpha \tau_o} \quad (4.1.30)$$

$$\pi_{II} = \pi_{l_{z,o}^*} = \frac{(l_{z,o}^*)^2}{\alpha \tau_o} \left(\frac{k_m}{l_{z,o}^* v_{z,o} \rho_{e,w} c_{e,w}} \right)^2 = \frac{k_m^2}{\alpha \tau_o (v_{z,o} \rho_{e,w} c_{e,w})^2} = \frac{\alpha}{\tau_o v_{z,o}^2} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)^2 \quad (4.1.31)$$

π_I es la forma adimensional de la incógnita $l_{z,o}^*$ y retiene el significado físico de π_4 mientras que el segundo tiene un significado físico complejo ya que se obtiene de la forma $\pi_{II} = \pi_4 (\pi_5)^2$. Realmente, π_{II} es el balance (almacenamiento/difusión)·(difusión/advección)². La complejidad de ciertos grupos en relación con su significado físico ha sido objeto de mucha discusión en la literatura científica (Alhama y Madrid [2012]) La solución, $\pi_{l_{z,o}^*} = \Psi(\pi_{II})$, proporciona el orden de magnitud de $l_{z,o}^*$. Para acuíferos profundos ($H > l_{z,o}^*$):

$$l_{z,o}^* = \sqrt{\alpha \tau_o} \Psi_9 \left\{ \frac{\alpha}{\tau_o v_{z,o}^2} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)^2 \right\} \quad (\text{Curva universal F}) \quad (4.1.32)$$

con Ψ_3 una función matemática indeterminada que modula la solución $l_{z,0}^* = \sqrt{\alpha\tau_0}$ (para el caso $v_{z,0} = 0$) debido a la existencia del flujo vertical. Esta dependencia es válida para flujos ascendentes y descendentes. En el caso no restrictivo en el que $\rho_{e,w}c_{e,w} = \rho_e c_e$, la expresión anterior se reduce a

$$l_{z,0}^* = \sqrt{\alpha\tau_0} \Psi_{10} \left\{ \frac{\alpha}{\tau_0 v_{z,0}^2} \right\} \quad (4.1.33)$$

Para velocidades grandes, por ejemplo del orden de 10^{-4} m/s, el grupo adimensional $\pi_5 \ll 1$ y el efecto difusivo puede considerarse despreciable causando perfiles de temperatura media muy curvos mientras que para pequeñas velocidades, por ejemplo del orden de 10^{-7} m/s, el grupo $\pi_5 \gg 1$ y el efecto de arrastre es despreciable causando perfiles de temperatura media cuasi lineales. En un rango intermedio, los efectos son comparables y los perfiles de curvatura de curvatura intermedia entre los anteriores.

Aplicando el teorema de pi, la solución para la incógnita $\Delta T' = \frac{(\Delta T)_z}{(\Delta T)_{z=0}}$ para acuíferos profundos ($H > l_{z,0}^*$) y flujos ascendentes o descendentes es:

$$\frac{(\Delta T)_z}{(\Delta T)_{z=0}} = \Psi_{11} \left(\frac{z}{l_{z,0}^*} \right) \quad (\text{Curva universal G}) \quad (4.1.34)$$

Los acuíferos superficiales (poco profundos, en los que $H < l_{z,0}^*$) carecen de longitud característica en su profundidad, por lo que hay que introducir el espesor del acuífero en vez de $l_{z,0}^*$ para hacer adimensional la variable independiente z . En este caso, la solución para $\Delta T' = \frac{(\Delta T)_z}{(\Delta T)_{z=0}}$:

$$\frac{(\Delta T)_z}{(\Delta T)_{z=0}} = \Psi_{12} \left(\frac{z}{H}, \frac{H^2}{\alpha\tau_0}, \frac{\alpha}{\tau_0 v_{z,0}^2} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)^2 \right) \quad (\text{Ábaco universal H}) \quad (4.1.35)$$

Merece la pena en este punto introducir un comentario sobre las soluciones que aportaría el “Análisis Dimensional Clásico” a estos problemas. En primer lugar, este análisis hubiera considerado la magnitud H como variable relevante siempre, lo que no es correcto para acuíferos profundos en los cuales el patrón se extiende solamente a una pequeña región menor, o mucho menor que H . En segundo lugar, su aplicación no proporciona monomios como los que aparecen en el argumento de la expresión (4.1.31). En su lugar, en el Análisis Dimensional Clásico emergen dos monomios, $\frac{\alpha}{\tau_0 v_{z,0}^2}$ y $\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}}$, dando origen a una solución mucho menos precisa. Finalmente, resaltar que el Análisis Dimensional Clásico no interpreta los grupos adimensionales como expresiones de balance de magnitudes que interactúan en el problema y, cuando lo hace

(en ocasiones), la interpretación no es correcta. Ocurre así cuando, por ejemplo, se intenta atribuir a Reynolds el significado de “fuerzas de inercia/fuerzas viscosas” con valores numéricos del orden de 10^3 . Los grupos derivados con la técnica de adimensionalización discriminada y normalizada de las ecuaciones de gobierno que integran el modelo matemático sí tienen el significado de balances (aunque sea balances complejos cuando se manipulan) y un orden de magnitud unidad por los propios protocolos de deducción. De otra forma, uno de los términos del balance dentro del grupo debería ser despreciable frente al otro y eliminado de la expresión de la ecuación de gobierno, reduciendo ésta a una forma más sencilla. De todo lo anterior, es posible asignar orden de magnitud unidad también a las funciones arbitrarias que aparecen por la aplicación del teorema de π . Sin embargo, la existencia de grupos adimensionales de tipo geométrico derivados generalmente de las condiciones de contorno (llamados relaciones de aspecto o factores de forma) puede alejar estos resultados en algunos problemas ya que tales grupos ni son balance de magnitudes físicas ni son necesariamente de orden de magnitud unidad.

4.1.5 Curvas y ábacos universales

La Tabla 4.1.1 resume el conjunto de soluciones universales derivados en la sección anterior, mientras que las Figuras 4.1.2 a 4.1.9 muestran las curvas y ábacos universales que derivan de estas soluciones.

Soluciones universales		Figura
Temperatura constante en la superficie del terreno	$T'(z) = \frac{T(z) - T_{av}}{T_o - T_{av}} = \Psi_2 \left\{ \frac{\alpha}{v_{z,o} H} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right), \frac{z}{H} \right\}$	Ábaco Universal A, ecuación (4.1.12) Figura 4.1.2
	$T'(z, t) = \frac{T(z) - T_{av}}{T_o - T_{av}} = \Psi_6 \left\{ \frac{z}{H}, \frac{t}{\tau^*} \right\}$	Ábaco Universal C, ecuación (4.1.18) Figura 4.1.4
	$\tau^* = \frac{H^2}{\alpha} \Psi_4 \left\{ \frac{\alpha}{v_{z,o} H} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right) \right\}$	Curva Universal B, ecuación (4.1.16) Figura 4.1.3
Variación sinusoidal de la temperatura en la superficie del terreno y $v_{z,o} = 0$	Acuíferos profundos ($H > l_{z,o}^*$): $(\Delta T')_z = \frac{(\Delta T)_z}{(\Delta T)_{z=0}} = \Psi \left(\frac{z}{l_{z,o}^*} \right) = \Psi_7 \left(\frac{z}{\sqrt{\alpha \tau_o}} \right)$	Curva Universal D, ecuación (4.1.26) Figura 4.1.5
	Acuíferos superficiales ($H < l_{z,o}^*$): $(\Delta T')_z = \frac{(\Delta T)_z}{(\Delta T)_{z=0}} = \Psi_8 \left(\frac{H^2}{\alpha \tau_o}, \frac{z}{H} \right)$	Ábaco universal E, ecuación (4.1.27) Figura 4.1.6
Variación sinusoidal de la temperatura en la superficie del terreno y $v_{z,o} \neq 0$	Acuíferos profundos ($H > l_{z,o}^*$) $l_{z,o}^* = \sqrt{\alpha \tau_o} \Psi_9 \left\{ \frac{\alpha}{\tau_o v_{z,o}^2} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)^2 \right\}$	Curva Universal F, ecuación (4.1.32) Figura 4.1.7
	Acuíferos profundos ($H > l_{z,o}^*$) $\frac{(\Delta T)_z}{\Delta T_{z=0}} = \Psi_{11} \left(\frac{z}{l_{z,o}^*} \right)$	Curva Universal G, ecuación (4.1.34) Figura 4.1.8
	Acuíferos superficiales ($H < l_{z,o}^*$) $\frac{(\Delta T)_z}{(\Delta T)_{z=0}} = \Psi_{12} \left(\frac{z}{H}, \frac{H^2}{\alpha \tau_o}, \frac{\alpha}{\tau_o v_{z,o}^2} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)^2 \right)$	Ábaco universal H, ecuación (4.1.35) Figura 4.1.9

Tabla 4.1.1. Resumen de las soluciones universales

Para la condición de contorno de temperatura constante en la superficie del terreno, las curvas universales que representan la temperatura estacionaria adimensional (Ábaco Universal A) se muestran en la Figura 4.1.2 para flujos ascendentes y descendentes. El parámetro de los ábacos

es el grupo adimensional $\frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)$ para el que se han tomado valores por encima y por debajo de la unidad. Se trata de ábacos antisimétricos en los cuales, como esperábamos, los perfiles tienden a ser lineales para valores de $\frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)$ de orden de magnitud superior a la unidad (influencia del efecto de difusión) y acusadamente curvos para valores de orden de magnitud inferior a la unidad (influencia del efecto advectivo). La curva universal que recoge la dependencia del tiempo característico con el monomio $\frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{\rho_e c_e}{c_{e,w} \rho_{e,w}} \right)$ se muestra en la Figura 4.1.3 y es la misma para flujos ascendentes y descendentes. Grandes valores de este monomio no cambian el tiempo característico adimensional, $\frac{\alpha \tau^*}{H^2}$, típico de problemas de difusión pura, de valor $\tau^* \sim \frac{H^2}{\alpha}$. El criterio para elegir τ^* es que la temperatura en $y = 0.9H$ (una posición suficientemente alejada de la superficie) alcance el 95% de su rango de variación. Es un resultado coherente que proporciona un tiempo característico de $\tau^* = 0.37 \frac{H^2}{\alpha}$ para casos de flujo nulo (un valor del mismo orden de magnitud que $\frac{H^2}{\alpha}$) y de $\tau^* \rightarrow 0$ como el límite para velocidades grandes.

La temperatura adimensional durante el periodo transitorio, $T'(z, t) = \frac{T(z) - T_{av}}{T_o - T_{av}} = \Psi_6 \left\{ \frac{z}{H}, \frac{t}{\tau^*} \right\}$, mostrada en la Figura 4.1.4, es función de la posición relativa $\frac{z}{H}$ y del tiempo relativo $\frac{t}{\tau^*}$, pero no depende del salto térmico en la superficie. Las concavidades de las curvas de este ábaco difieren dependiendo de si se trata de flujo ascendente o descendente, excepto para pequeños valores de $\frac{t}{\tau^*}$ para los cuales, en flujo descendente, el arrastre y la difusión son efectos opuestos en dirección, lo que da lugar a curvas características claramente diferentes (con inflexiones) a las asociadas a tiempos más cercanos a la situación estacionaria.

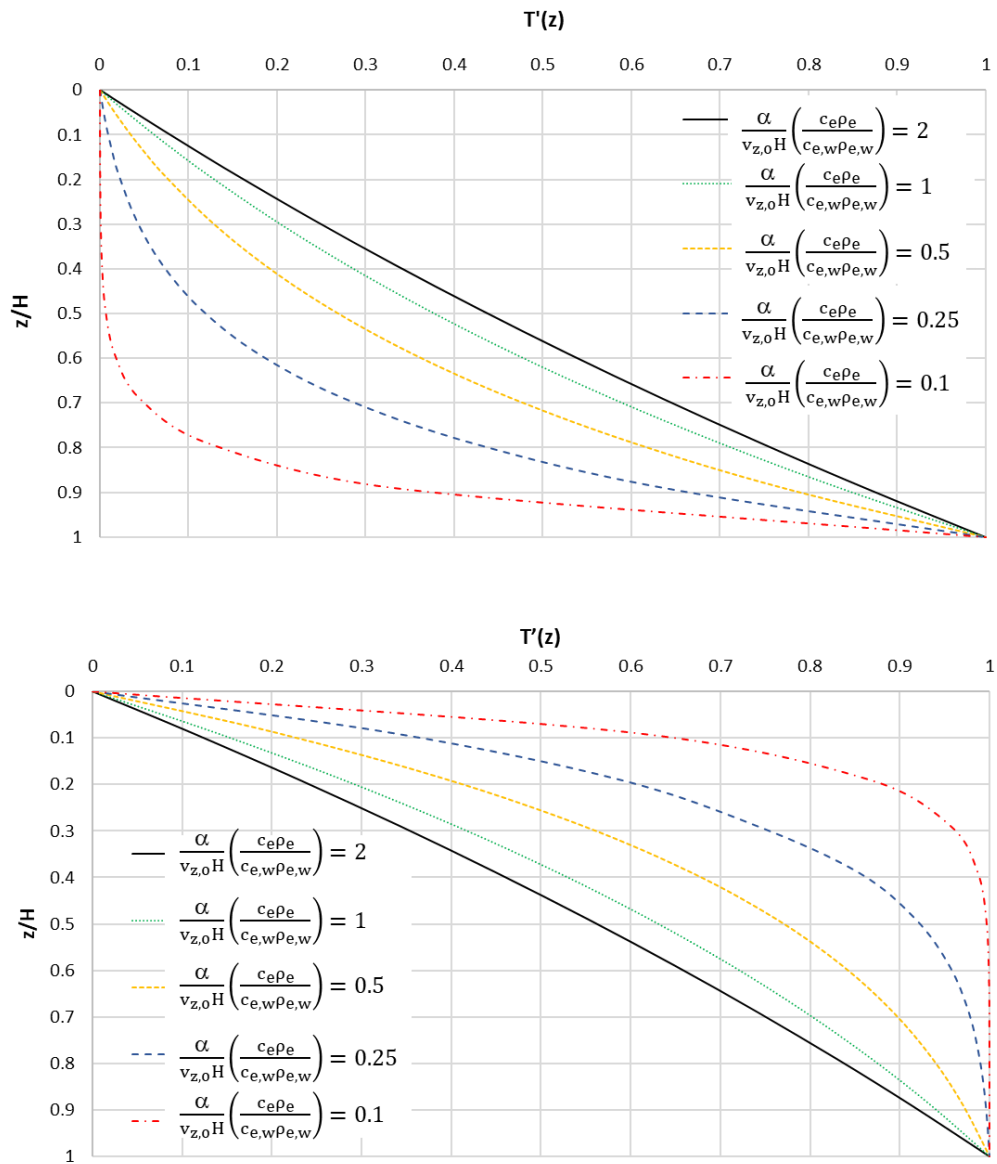


Figura 4.1.2. Condición de salto térmico. Flujo descendente (arriba) y flujo ascendente (abajo).

$$\text{Ábaco universal A: } T'(z) = \Psi_2 \left\{ \frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right), \frac{z}{H} \right\}$$

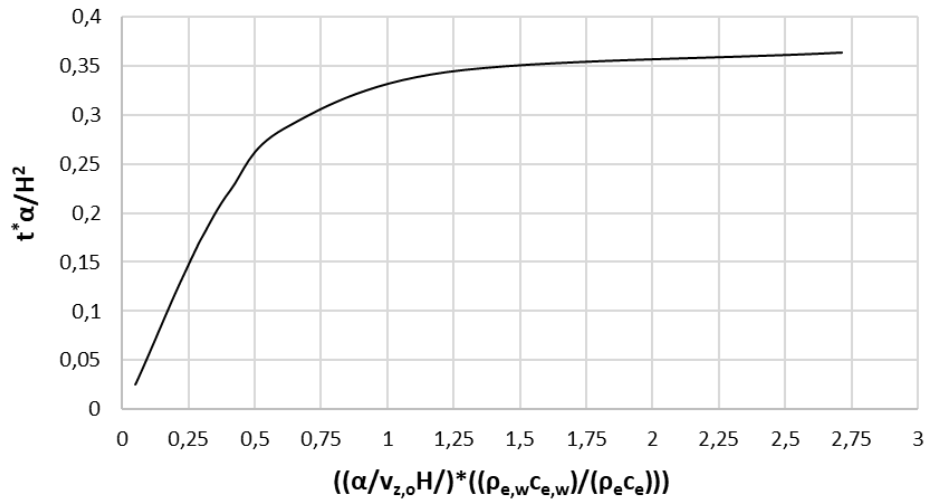


Figura 4.1.3. Temperatura constante en la superficie. Flujo ascendente y descendente.

$$\text{Curva universal B: } \tau^* = \frac{H^2}{\alpha} \Psi_4 \left\{ \frac{\alpha}{v_{z,o} H} \left(\frac{\rho_{e,w} c_{e,w}}{\rho_e c_e} \right) \right\}$$

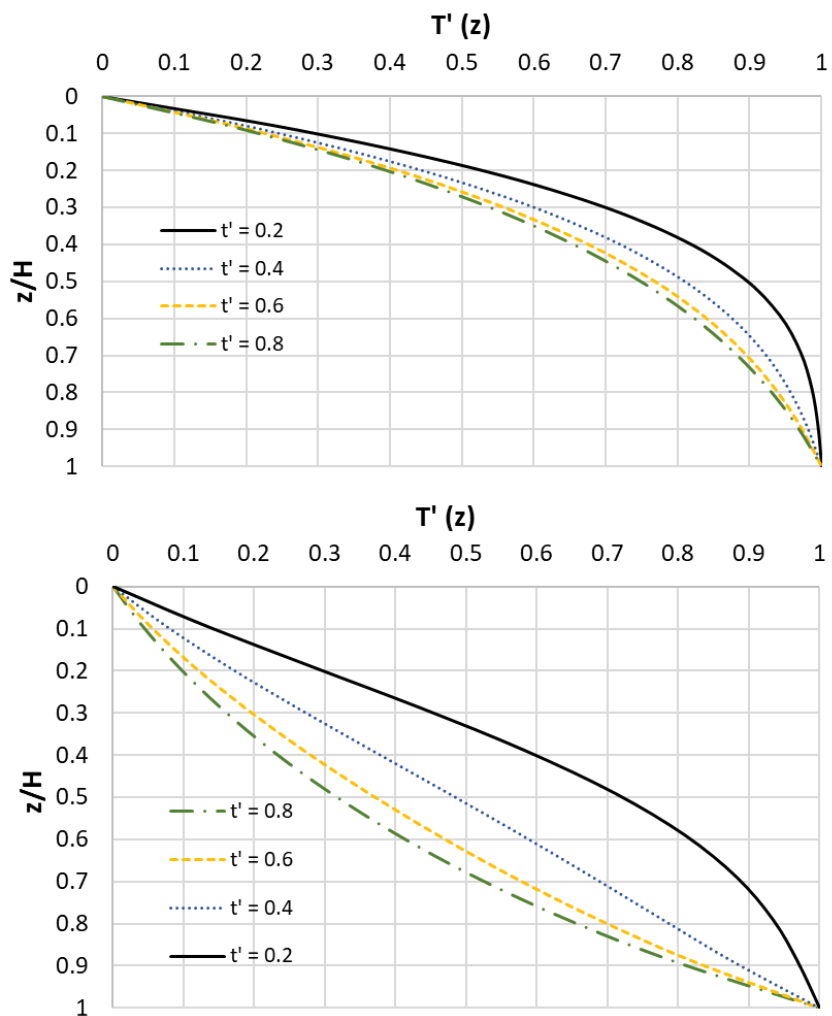


Figura 4.1.4. Condición de salto térmico. Flujos ascendentes (arriba) y descendentes (abajo).

$$\text{Ábaco universal C: } T'(z, t) = \frac{T(z) - T_{av}}{T_o - T_{av}} = \Psi_6 \left\{ \frac{z}{H}, \frac{t}{\tau^*} \right\}$$

Para condición de contorno armónica en la superficie y $v_{z,0}=0$, en acuíferos de gran profundidad, la profundidad total H es una magnitud irrelevante ya que las oscilaciones térmicas en el terreno sólo se manifiestan en una región cercana a la superficie de extensión $l_{z,0}^* \ll H$. En ella, la amplitud de la oscilación $(\Delta T)_z$ sólo depende de la profundidad relativa $\frac{z}{l_{z,0}^*}$ decayendo a valores despreciables más allá de la profundidad $l_{z,0}^*$ (véase Figura 4.1.5). En acuíferos superficiales, sin embargo, H es una magnitud relevante que, además de introducir un nuevo grupo adimensional $(\frac{H^2}{\alpha\tau_0})$, hace depender la amplitud de la oscilación de la nueva profundidad relativa $\frac{z}{H}$ (véase Figura 4.1.6). Las curvas del ábaco convergen pues, a la condición de temperatura constante (sin oscilación) impuesta en el fondo del dominio, pero tienen una pendiente tanto más constante cuanto menor es el valor del grupo adimensional $\frac{H^2}{\alpha\tau_0}$, hasta hacerse una línea recta en el límite $\frac{H^2}{\alpha\tau_0} \rightarrow 0$. La temperatura media adimensional con $v_{z,0}=0$ es linealmente dependiente de la profundidad y no está afectada, obviamente, ni por la amplitud de la oscilación térmica en la superficie, ni por el período.

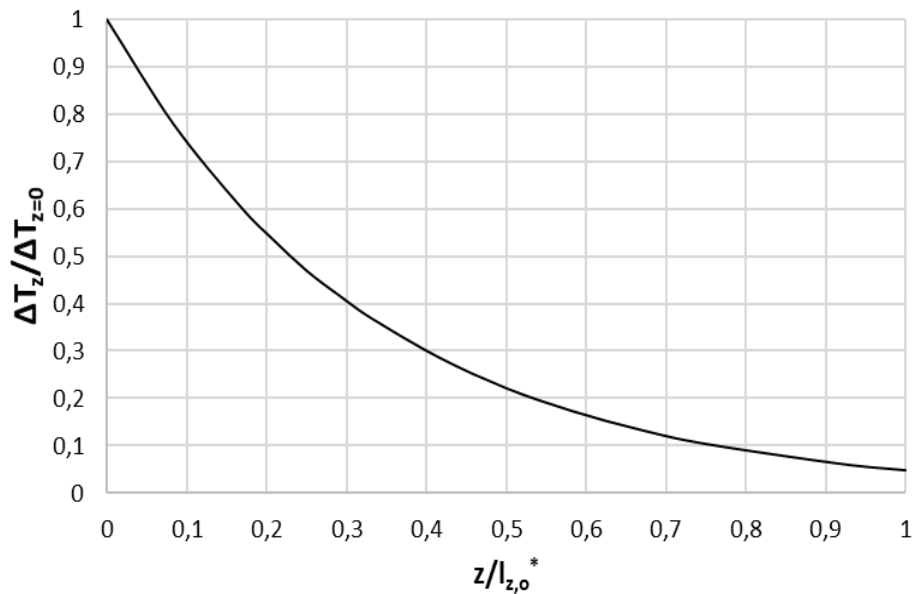


Figura 4.1.5. Temperatura armónica en el contorno y $v_{z,0}=0$. Acuíferos profundos ($H > l_{z,0}^*$).

$$\text{Curva universal D: } (\Delta T')_z = \frac{(\Delta T)_z}{(\Delta T)_{z=0}} = \Psi\left(\frac{z}{l_{z,0}^*}\right) = \Psi_7\left(\frac{z}{\sqrt{\alpha\tau_0}}\right)$$

Para el caso de variación sinusoidal de la temperatura en la superficie y $v_{z,0} \neq 0$, la longitud característica, como se esperaba, aumenta cuando disminuye el flujo ascendente o aumenta el descendente, Figura 4.1.7, aunque esta dependencia tiene una forma asintótica al aumentar el monomio $\frac{\alpha}{\tau_0 v_{z,0}^2} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}}\right)^2$ por encima de la unidad (para flujos ascendentes), región para la

cual el efecto advectivo es despreciable. La forma adimensional de la amplitud de las oscilaciones, tanto para flujo ascendente como descendente, depende de $\frac{z}{l_{z,0}^*}$, ya que la influencia de τ_0 está ya recogida en $l_{z,0}^*$, Figura 4.1.8.

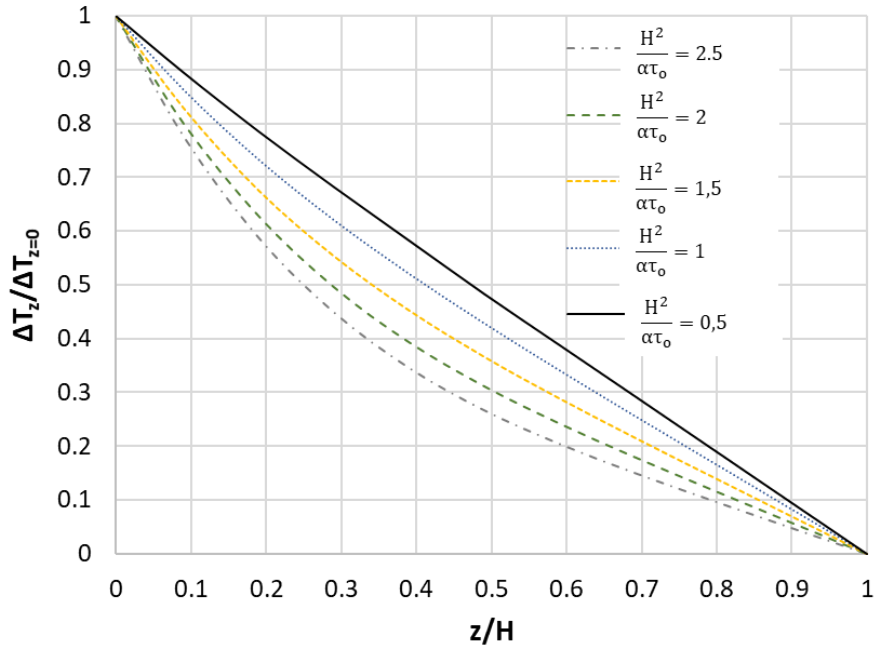


Figura 4.1.6. Temperatura armónica y $v_{z,0}=0$. Acuíferos superficiales ($H < l_{z,0}^*$).

$$\text{Ábaco universal E: } (\Delta T')_z = \frac{(\Delta T)_z}{(\Delta T)_{z=0}} = \Psi_8 \left(\frac{H^2}{\alpha\tau_0}, \frac{z}{H} \right)$$

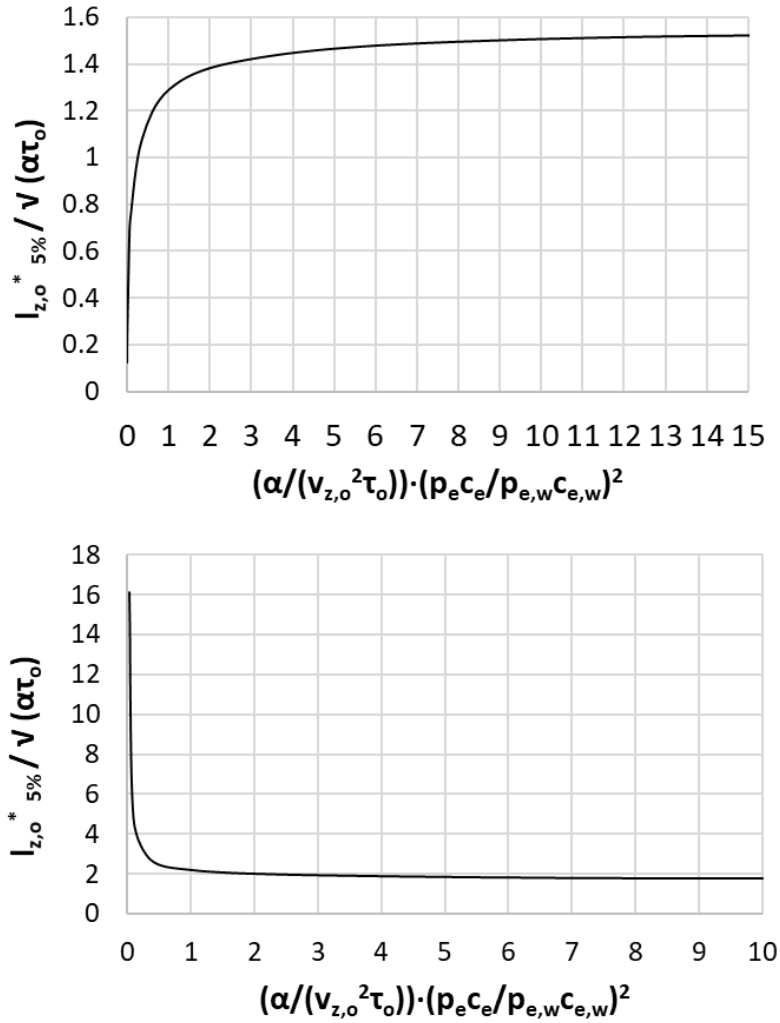


Figura 4.1.7. Temperatura armónica y $v_{z,0} \neq 0$. Acuíferos profundos ($H < l_{z,0}^*$).

Izquierda (flujo ascendente) y derecha (flujo descendente).

$$\text{Curva universal F: } I_{z,0}^* = \sqrt{\alpha \tau_0} \Psi_9 \left\{ \frac{\alpha}{\tau_0 v_{z,0}^2} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)^2 \right\}$$

En relación con la amplitud de la oscilación en acuíferos superficiales, los ábacos se muestran en la Figura 4.1.9, con el mismo parámetro adimensional del cual depende la temperatura media.

En este caso, valores del grupo $\frac{\alpha}{\tau_0 v_{z,0}^2} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)^2$ por debajo de la unidad y flujo descendente,

Figura 4.1.9 (a), los gráficos de la temperatura adimensional en función de z/H son menos curvos y más sensibles al parámetro $\frac{H^2}{\alpha \tau_0}$ que para valores por encima de la unidad, Figura 4.1.9

(b). Algo similar ocurre para flujos ascendentes, Figuras 4.1.9 (c) y 4.1.9 (d).

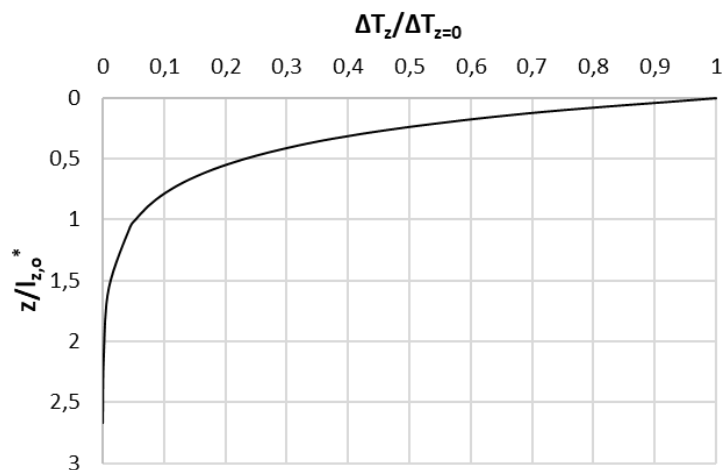


Figura 4.1.8. Temperatura armónica y $v_{z,0} \neq 0$. Acuíferos profundos ($H < l_{z,0}^*$).

Flujos ascendentes y descendentes. Curva universal G: $\frac{(\Delta T)_z}{\Delta T_{z=0}} = \Psi\left(\frac{z}{l_{z,0}^*}\right) = \Psi_{11}\left(\frac{z}{l_{z,0}^*}\right)$

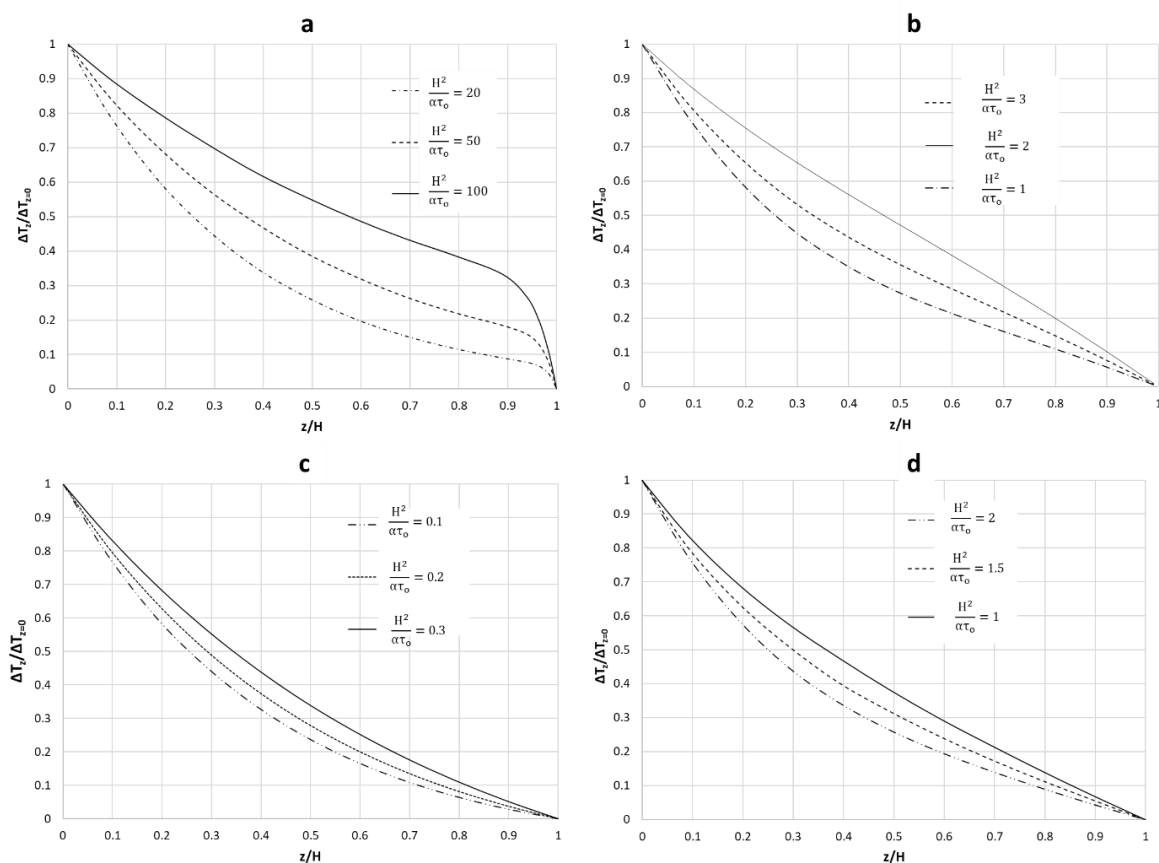


Figura 4.1.9. Temperatura armónica y $v_{z,0} \neq 0$. Acuíferos superficiales ($H < l_{z,0}^*$)

Flujo descendente: $\frac{\alpha}{\tau_0 v_{z,0}^2} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)^2 = 0.04225$ (a), $\frac{\alpha}{\tau_0 v_{z,0}^2} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)^2 = 4.225$ (b).

Flujo ascendente: $\frac{\alpha}{\tau_0 v_{z,0}^2} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)^2 = 0.05625$ (c), $\frac{\alpha}{\tau_0 v_{z,0}^2} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)^2 = 5.625$ (d).

Ábaco universal H: $\frac{(\Delta T)_z}{(\Delta T)_{z=0}} = \frac{(\Delta T)_z}{\Delta T_{z=0}} = \Psi_{12}\left(\frac{z}{H}, \frac{H^2}{\alpha\tau_0}, \frac{\alpha}{\tau_0 v_{z,0}^2} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}} \right)^2\right)$

4.1.6 Contribuciones y conclusiones

i) En esta sección se han deducido y verificado los grupos adimensionales que rigen la solución de los perfiles verticales de temperatura (expresados en su forma adimensional), en problemas 1D de flujo vertical de agua en suelos, ascendente y descendente, bajo condiciones de temperatura constante o armónica en su superficie y constante en el fondo. La deducción de los grupos se obtiene siguiendo la técnica de adimensionalización normalizada y discriminada de las ecuaciones de gobierno. La verificación de las dependencias entre incógnitas y grupos (teorema de pi) se ha llevado a cabo mediante simulaciones numéricas de un conjunto de casos ilustrativo y completo. Por último, la traducción o representación de las dependencias anteriores mediante curvas y ábacos universales se ha logrado merced a la simulación numérica y precisa de un gran número de escenarios.

ii) Hemos dado significado al monomio π_1 e introducido una $l_{\text{dif-adv}}^*$ y una $\tau_{\text{dif-adv}}^*$, con significados físicos claros.

iii) Para condiciones de contorno de temperatura en escalón, además de verificar las soluciones de Bredehoeft y Papadopoulos [1965], que son corregidas con la relación entre calores específicos del agua y la matriz porosa del suelo saturado, se deduce el tiempo característico de duración del transitorio y el ábaco universal de perfiles de temperatura en ese periodo. Estas soluciones son aplicables al caso de temperatura armónica en la superficie siempre que se refieran a la temperatura media del ciclo.

iv) Para la condición de temperatura armónica en superficie, con independencia de cuál sea la temperatura constante del fondo, se distingue entre acuíferos profundos y superficiales, introduciendo una longitud característica en los primeros cuya dependencia con los grupos es deducida y representada en forma de gráfico universal. Esta longitud define la extensión del acuífero donde la onda armónica de temperatura es aún apreciable.

v) En el caso particular $v_{z,0} = 0$, la forma adimensional de las desviaciones máximas de temperatura en acuíferos profundos depende de la posición relativa respecto de la longitud característica introducida en el problema. En acuíferos superficiales, sin embargo, la forma dimensional anterior depende tanto de la posición relativa con respecto a H como del grupo adimensional $\frac{H^2}{\alpha\tau_0}$.

En el caso $v_{z,0} \neq 0$ y acuíferos profundos se derivan dependencias y expresiones universales para la amplitud de la oscilación térmica en el terreno, tanto para flujos ascendentes como descendentes.

Finalmente, para acuíferos superficiales, se deducen los tres monomios de los que depende la amplitud de la oscilación térmica y se representan algunas de las curvas universales de esta dependencia.

4.2 Segunda aplicación. Flujo horizontal superficial

4.2.1. Introducción y antecedentes

El estudio del campo de temperatura o sus formas adimensionales proveniente del balance térmico en acuíferos semiconfinados con flujo horizontal y de velocidad constante de agua es un problema más complejo que el anteriormente estudiado debido al mayor número de parámetros físicos y geométricos involucrados. La conexión entre perfiles de temperatura y flujos de agua subterránea ha sido estudiada por un gran número de autores en escenarios reales (McCord y col. [1992], Constantz [2008], Szymkiewicz y col. [2015] y Duque y col. [2016]), incluso algunos autores propusieron soluciones analíticas o empíricas (Bredehoeft y Papadopoulos [1965], Stallman [1965], Ziagos y Blackwell [1986], Taniguchi [1993], Lu y Ge [1996] y Holzbecher [2005]).

Aparte del antiguo paper de Stallman [1965], Cartwright [1971] es el único autor, hasta donde conocemos, que estudia de forma cualitativa los perfiles térmicos generados debido a la existencia de flujos horizontales de agua en acuíferos semiconfinados poco profundos. Sin embargo, las soluciones analíticas que reporta el autor asumen una hipótesis ciertamente severa: la existencia de un gradiente térmico horizontal de valor constante a lo largo del acuífero, una condición muy alejada probablemente del campo térmico, incluso en la región de entrada de flujo donde, sin duda, existen gradientes térmicos horizontales que progresivamente decrecen hasta hacerse independientes de la posición horizontal. Con la condición asumida, pues, el autor no necesita establecer una condición de contorno térmica en el borde izquierdo del dominio. Mantener esta condición indefinidamente aguas abajo carece de sentido pues el campo térmico crecería o decrecería indefinidamente según el signo positivo o negativo (respectivamente) del gradiente.

Suprimiendo la hipótesis de un gradiente horizontal constante, con independencia de las condiciones térmicas de contacto en las superficies superior e inferior, la existencia de un flujo horizontal con una temperatura conocida en el borde de entrada (diferente de las temperaturas en la superficie del terreno y en el fondo del dominio) da lugar al acoplamiento de los procesos de difusión y transporte de calor con el campo constante de velocidades. Los flujos de advección y difusión se balancean en la ecuación de transporte de calor determinando un campo de

temperaturas estacionario en una región de entrada limitada del acuífero, más allá de la cual el perfil es lineal y, de acuerdo con las condiciones de contorno, viene dado por

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{H}y \quad (4.2.1)$$

el típico perfil de la temperatura en una pared (1D) bajo condiciones de primera clase en sus superficies exteriores y una vez superado el transitorio. Se define una longitud característica en este escenario como la extensión horizontal en la que el perfil evoluciona hasta hacerse prácticamente constante de acuerdo con un algún criterio.

Nuestro interés en este problema está en investigar los perfiles de temperatura, tanto horizontales como verticales, dentro de la región limitada por la longitud característica anterior, tratando de caracterizarlos dimensionalmente para construir representaciones universales de los mismos e investigar la influencia que en ellos tiene la velocidad del flujo de agua subterránea. Esto es, deducir los grupos adimensionales que rigen la forma y desarrollo de estos perfiles y representar las soluciones universales mediante el teorema de pi (Buckingham [1914]) y las simulaciones numéricas necesarias, Manteca y col. [2014], Cánovas y col. [2015] y Marín y col. [2016].

En primer lugar, se deducirán los grupos adimensionales a partir del modelo matemático, verificando los resultados mediante la selección de un conjunto completo de escenarios suficientemente ilustrativos.

4.2.2. Nomenclatura específica

C_1, C_2, C_3, C_4	constantes (adimensionales)
j	flujo de calor ($Jm^{-2}s^{-1}$)
k	Difusividad térmica (m^2/s)
L	longitud total del acuífero (m)
l	longitud (m)
l_x^*	longitud característica horizontal en la que los efectos de la difusión de calor y de la advección alcanzan el mismo orden de magnitud (m)
$l_{x,T}^*$	longitud característica horizontal (m)
$l_{y,T}^*$	longitud característica vertical debida a la variación sinusoidal de la temperatura (m)
T_1	temperatura en la superficie del terreno ($^{\circ}C$)
T_2	temperatura en el fondo del dominio ($^{\circ}C$)
T_3	temperatura en el borde izquierdo del dominio ($^{\circ}C$)
T_{av}	valor medio debido a la variación sinusoidal de la temperatura en la superficie del terreno ($^{\circ}C$)
$T_{estacionario, \frac{H}{2}}$	Temperatura en el estacionario en la posición $y = H/2$ ($^{\circ}C$)
T_{max}	valor máximo de la temperatura debido a la variación sinusoidal en la superficie del terreno ($^{\circ}C$)

T_{\min}	valor mínimo de la temperatura debido a la variación sinusoidal en la superficie del terreno ($^{\circ}\text{C}$)
$T'(x)$ perfil vertical	perfil adimensional vertical de temperaturas
$T'(y)$ perfil horizontal	perfil adimensional horizontal de temperaturas
T' perfil horizontal ($y = \frac{H}{2}$)	perfil adimensional horizontal de temperaturas en la posición $y = H/2$
$v_{x,0}$	velocidad horizontal del flujo (m/s)
α_m	$\alpha_m = k / \rho_{e,w} c_{e,w}$ (m^2/s)
$\pi_{\text{dif-adv}}$	grupo adimensional que caracteriza la ratio entre los efectos de la difusividad térmica y de la advección en el acuífero
$\pi_{l_x,T}^*$	grupo adimensional relativo a la longitud característica horizontal
$\pi_{l_y,T}^*$	grupo adimensional relativo a la longitud característica vertical
π_{τ}^*	grupo adimensional relativo al tiempo característico
π_{T_1,T_2,T_3}	grupo adimensional relativo a las condiciones térmicas de contorno
τ_0	período de la oscilación sinusoidal (s)
τ^*	tiempo característico (s)

Subíndices

$(\cdot)_c$	relativo a la convección de calor
$(\cdot)_d$	relativo a la difusión de calor
$(\cdot)_i$	$i = 1, 2, \dots, N$. Subíndice de una temperatura particular de un perfil
$(\cdot)_{\text{ini}}$	denota valor inicial
$(\cdot)_j$	$j = 1, 2, \dots$ Subíndice de la iteración para el cálculo del funcional
$(\cdot)_s$	relativo al almacenamiento de calor

Superíndices

$(\cdot)^*$	denota magnitud característica
$(\cdot)'$	denota carácter adimensional

4.2.3 Modelos físico y matemático

La Figura 4.2.1, presentada anteriormente (Capítulo 3) y que repetimos aquí por comodidad de lectura, muestra el esquema físico del problema y las condiciones de contorno de flujo y temperatura en el acuífero saturado. El agua penetra por la frontera vertical izquierda del dominio y sale por la frontera derecha. Las fronteras horizontales, superior e inferior son impermeables al flujo. En cuanto a la temperatura, las condiciones de contorno en las fronteras superior, inferior e izquierda son de primera clase (tipo Dirichlet). El dominio es suficientemente extenso horizontalmente como para permitir un desarrollo completo del perfil de temperaturas hasta hacerse independiente de la posición horizontal. Con el fin de evitar la influencia de la condición térmica en la frontera derecha en el perfil de temperaturas se impone una condición que llamamos “libre”, que asegura descarga en esta frontera con una temperatura igual a la que tiene inmediatamente antes de ella. El origen de coordenadas se muestra en la propia figura.

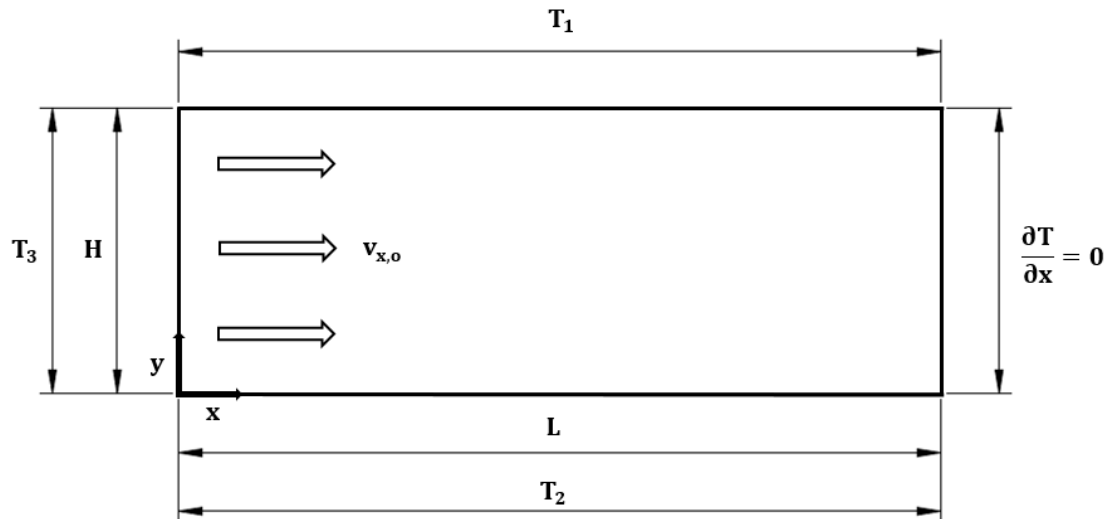


Figura 4.2.1. Esquema físico del problema y condiciones térmicas de contorno

El campo de velocidades es conocido y constante en todo el dominio, $v(x, y) = v_{x,o}$. La única ecuación de gobierno es la de la conservación del flujo de calor, un resultado del balance local entre el flujo de difusión de Fourier, $\mathbf{j}_d = -k \nabla T$, el flujo de advección o arrastre, $\mathbf{j}_c = \rho_{e,w} c_{e,w} \mathbf{v} \cdot \nabla T$ y el almacenamiento $\mathbf{j}_s = \rho_e c_e \frac{\partial T}{\partial t}$. Su expresión es

$$\rho_e c_e \frac{\partial T}{\partial t} - k \nabla^2(T) + \rho_{e,w} c_{e,w} \mathbf{v} \cdot \nabla(T) = 0 \quad (4.2.2)$$

En dominios térmicamente isótropos, homogéneos y de geometría 2D rectangular, esta ecuación desarrollada se reduce a

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \rho_{e,w} c_{e,w} \left(v_{x,o} \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho_e c_e \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.2.3)$$

El modelo se completa con el conjunto de ecuaciones que expresan las condiciones de contorno e iniciales de temperatura. La temperatura en la frontera superior (superficie del terreno) puede ser constante o variar sinusoidalmente, mientras que, tanto en el fondo del dominio como en el borde izquierdo, la temperatura se mantiene constante. Por tanto, las ecuaciones que completan el modelo matemático son las siguientes:

$$T_{(x,y=H,t)} = T_1 \quad (\text{Salto en escalón}) \quad (4.2.4)$$

$$T_{(x,y=H,t)} = T_m + \Delta T \sin\left(\frac{2\pi}{\tau_o} t\right) \quad (\text{Variación sinusoidal}) \quad (4.2.5)$$

$$T_{(x,y=0,t)} = T_2 \quad (4.2.6)$$

$$T_{(x=0,y,t)} = T_3 \quad (4.2.7)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (4.2.8)$$

$$T_{(x,y,t=0)} = T_{ini} \quad (4.2.9)$$

A pesar de no ser relevante para la solución estacionaria, se asume una temperatura inicial T_{ini} en todo el dominio con objeto de simular tanto la solución transitoria (o pseudo-transitoria en el caso de variación armónica sinusoidal en la superficie) como la solución estacionaria para tiempos suficientemente grandes.

La simulación se lleva a cabo con el programa Ngspice con tiempos de computación del orden de 1 minuto. Por esta razón, así como por la facilidad de modificar el código en el modelo en red, se ha decidido utilizar un software libre de simulación de circuitos eléctricos en lugar de un software comercial como puede ser MODFLOW. El modelo en red generado a partir del modelo matemático anteriormente presentado, así como el código necesario ha sido generado en Matlab.

4.2.4 Discusión preliminar

El campo de temperaturas estacionario

Para ilustrar el tipo de solución estacionaria en este escenario, la Figura 4.2.2 muestra el patrón del campo de temperaturas estacionarias para cuatro escenarios cuyos parámetros físicos y geométricos, para los que se han adoptado valores sencillos por simplificar, se muestran en la Tabla 4.2.1. La temperatura en la superficie del acuífero es de valor constante en todos los casos y la extensión de los escenarios suficientemente grande como para permitir el desarrollo del perfil térmico en su totalidad.

Los patrones de mostrados confirman los aspectos más relevantes de la solución, esencialmente la emergencia de una longitud característica (aparentemente independiente de los valores de temperatura en el contorno) para esta solución estacionaria. La definición precisa del valor de esta longitud se verá más adelante. Más allá de ella, el perfil vertical de temperaturas es lineal, independiente del tiempo y de la velocidad del agua subterránea.

Escenario	T_1 (°C)	T_3 (°C)	T_2 (°C)	k (cal s ⁻¹ m ⁻¹ °C ⁻¹)	$\rho_e c_e$ cal/(m ³ °C)	$\rho_{e,w} c_{e,w}$ cal/(m ³ °C)	H (m)	$v_{x,o}$ (m/s)
I	0	0	1	0.8	10 ⁶	10 ⁶	1	5·10 ⁻⁶
II	0	0.5	1	0.8	10 ⁶	10 ⁶	1	5·10 ⁻⁶
III	0	0.2	1	0.8	10 ⁶	10 ⁶	1	5·10 ⁻⁶
IV	0	2	1	0.8	10 ⁶	10 ⁶	1	5·10 ⁻⁶

Tabla 4.2.1. Parámetros de escenarios típicos cuyos patrones de temperatura se muestran en la Figura 4.2.2

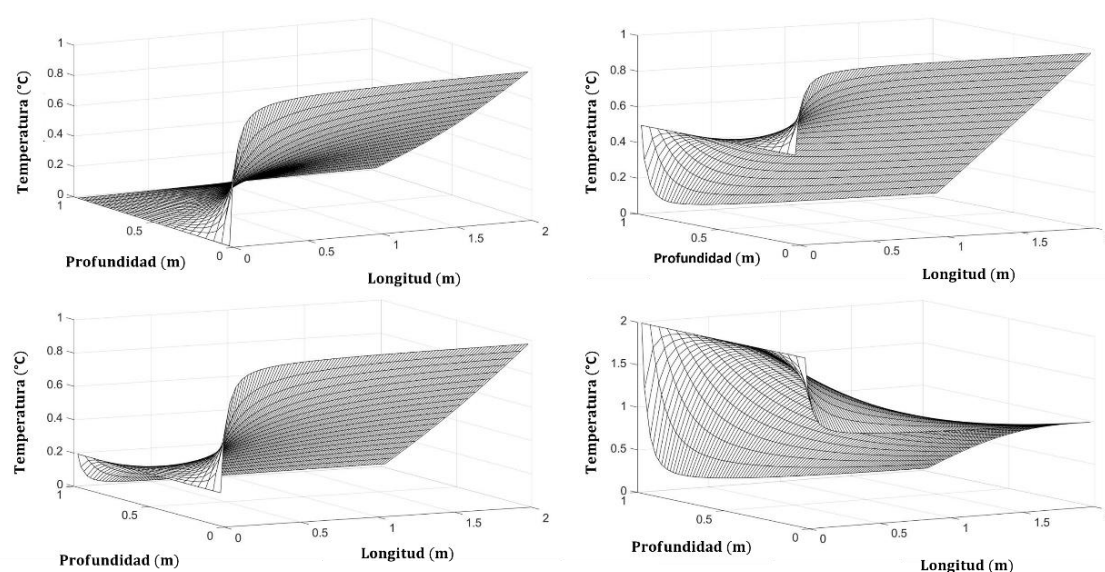


Figura 4.2.2. Patrones estacionarios de temperatura de los escenarios mostrados en la Tabla 4.2.1.

Escenarios I (izquierda) y II (derecha) arriba, escenarios III (izquierda) y IV (derecha) abajo

Si llamamos $l_{x,T}^*$ a esta longitud desconocida, por un lado, los perfiles para $x < l_{x,T}^*$ se curvan progresivamente tanto más cuanto menor sea la posición (x) en comparación con $l_{x,T}^*$. Por otro lado, el valor relativo de la temperatura en la frontera de entrada de agua (T_3) en comparación con las temperaturas en los bordes superior e inferior (T_1 y T_2), determina la existencia (o no) de inflexiones en la curvatura del perfil en una pequeña región cercana a la frontera de entrada de agua, inflexiones que no parecen influir sensiblemente en la longitud característica $l_{x,T}^*$. Puede advertirse también que las inflexiones en los perfiles se dan cuando el valor de T_3 está dentro del intervalo $[T_2, T_1]$, situación que suele ocurrir en casos reales.

En acuíferos con profundidades de varios metros o superiores, la longitud característica (como se verá después) aumenta con el cuadrado del espesor del acuífero. La extensión de la región

de entrada que refleja la influencia de la condición térmica del borde izquierdo de entrada (T_3) parece pequeña en comparación con $l_{x,T}^*$. Así, de acuerdo con estas ilustraciones, la influencia de T_1 , T_2 y T_3 dentro de $l_{x,T}^*$, con independencia de sus valores, parece ser muy pequeña o inexistente.

Para los escenarios de la tabla se cumple (en apariencia, pues veremos más tarde una definición precisa de $l_{x,T}^*$) que tales longitudes son las mismas en todos los escenarios. De hecho la longitud característica para los cuatro escenarios es 2.5 m aproximadamente tomando su medida sobre la línea media y con el criterio de que la temperatura alcanza el 95% del valor del intervalo $\left[T_3, T_{\text{estacionario}\frac{H}{2}} \right]$. Las inflexiones en los perfiles sólo se dan en los escenarios II y III.

La Figura 4.2.3 muestra los perfiles de temperatura de los cuatro escenarios en la posición horizontal $x = 2$ m. De acuerdo con estos resultados, mientras que los perfiles son prácticamente lineales para el escenario II, con una imperceptible inflexión en esa posición, el escenario III muestra un perfil claramente curvo con una débil inflexión en un punto cercano a la superficie del terreno debido a que $|T_3 - T_1| < |T_2 - T_1|$. En el escenario I, la curvatura del perfil es aún más apreciable y la inflexión ha desaparecido debido a que $T_3 = T_1$. Finalmente, el escenario IV muestra una acusada curvatura, de diferente concavidad a las anteriores (casos I y III) y sin inflexión, ya que T_3 está fuera del rango $[T_1, T_2]$ y tiene un valor superior al de sus extremos.

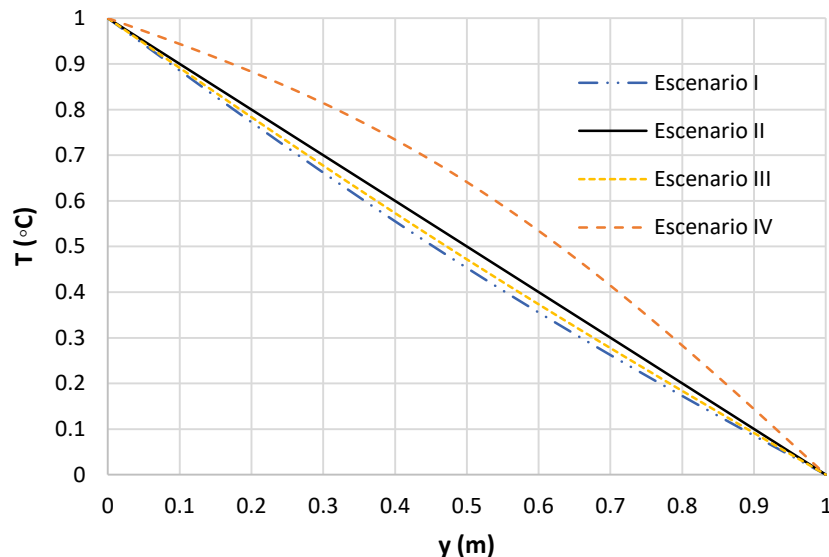


Figura 4.2.3. Perfiles de temperatura en la posición $x = 2$ m para los escenarios de la Tabla 4.2.1

Para ilustrar las características del campo térmico estacionario en este tipo de problemas, la Figura 4.2.4 muestra los perfiles horizontales de temperaturas, en los escenarios I y III, a cinco

profundidades distintas, $y = \frac{H}{6}, \frac{2H}{6}, \frac{3H}{6}, \frac{4H}{6}$ y $\frac{5H}{6}$. Para asegurar que $l_{x,T}^* < L$ se ha tomado un valor de 5 m en la simulación para la extensión horizontal del dominio. Se observa que, aunque los perfiles son de menor pendiente (dentro de la $l_{x,T}^*$) cerca de la superficie, los rangos de temperatura en los que se mueven son también de menor valor.

En base a estos resultados, que asumen siempre acuíferos extensos horizontalmente (en el sentido de que los efectos difusivos son despreciables frente a los de advección en prácticamente todo el dominio), $l_{x,T}^*$ podría ser definida, por ejemplo, como la extensión horizontal del acuífero, medida desde la frontera de entrada de flujo, en la que la temperatura adimensional en la línea central ($y = H/2$) alcanza un porcentaje significativo (95-99%) de su valor final en el estacionario, $\frac{T_1+T_2}{2}$.

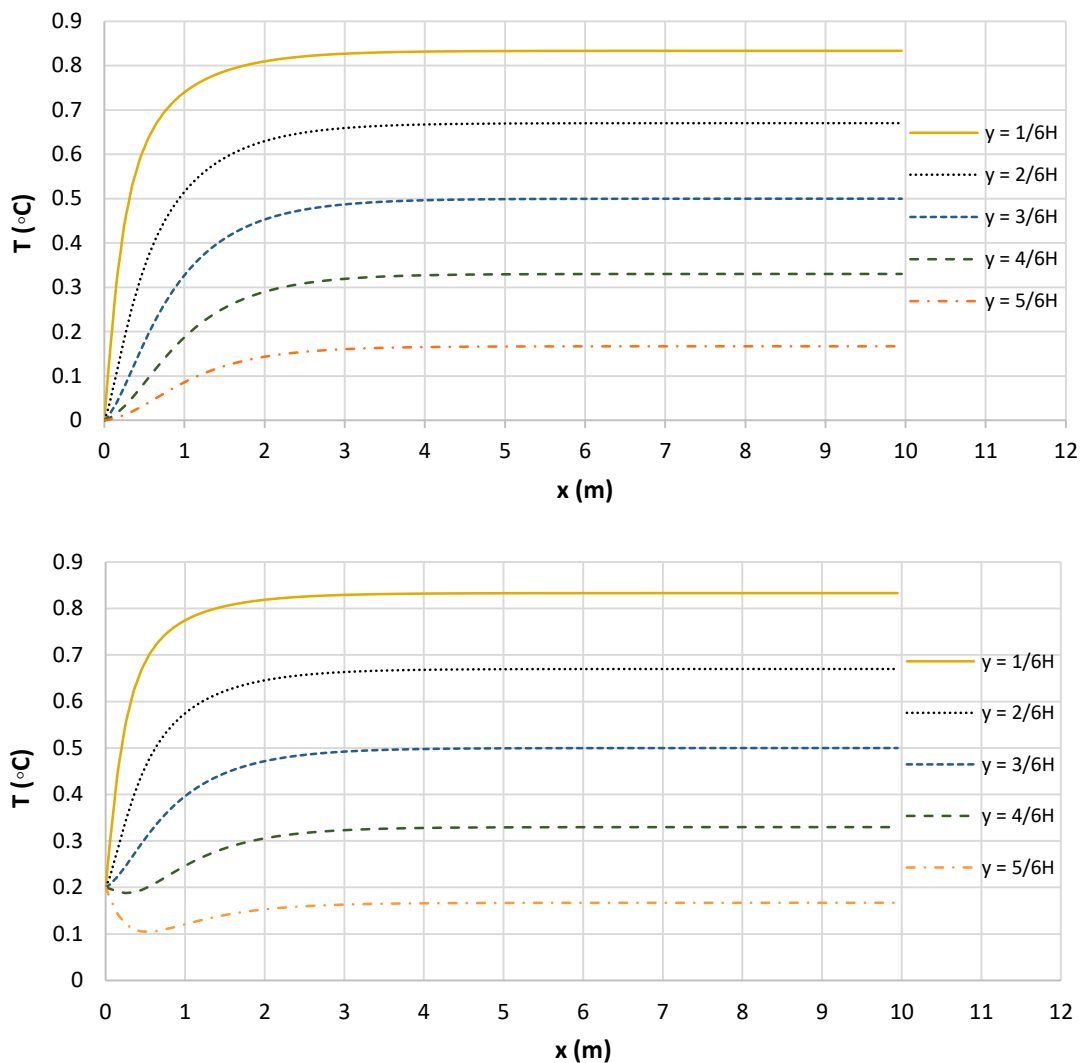


Figura 4.2.4. Perfiles horizontales en el estacionarios de temperatura de los escenarios I (arriba) y III (abajo) a las profundidades $y = \frac{H}{6}, \frac{2H}{6}, \frac{3H}{6}, \frac{4H}{6}$ y $\frac{5H}{6}$

De la Figura 4.2.4, para el escenario III con $\frac{T_1+T_2}{2} = 0.2$, las longitudes características relativas a porcentajes del 95 y 99% son:

$$T = 0.95 \cdot 0.5 = 0.475 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad l_{x,T}^* (95\%) = 2.1\text{m}$$

$$T = 0.99 \cdot 0.5 = 0.495 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad l_{x,T}^* (99\%) = 3.3\text{m}$$

Otros criterios para definir $l_{x,T}^*$ podrían ser igualmente válidos. Por ejemplo, la distancia a la cual el gradiente horizontal de temperaturas, en la línea central del dominio ($y = H/2$), tiene un valor suficientemente pequeño. La Figura 4.2.5 muestra esta componente del gradiente para el escenario III en el cual $T_3 \in [T_1, T_2]$. En ella, el valor de $\frac{\partial T}{\partial x}$ ha sido representado para cinco profundidades regularmente distribuidas, $y = \frac{H}{6}, \frac{2H}{6}, \frac{3H}{6}, \frac{4H}{6}$ y $\frac{5H}{6}$ m. Los valores de $l_{x,T}^*$ con el criterio del gradiente horizontal son:

$$\text{Para } \partial T / \partial x = 0.02 \text{ (1.15 } ^\circ\text{C/m)}, \quad l_{x,T}^* = 3.05 \text{ m}$$

$$\text{Para } \partial T / \partial x = 0.01 \text{ (0.57 } ^\circ\text{C/m)}, \quad l_{x,T}^* = 3.55 \text{ m.}$$

En relación con la influencia de los parámetros $v_{x,0}$, H y α en $l_{x,T}^*$, no parece necesario ilustrar con nuevos escenarios que valores crecientes de la profundidad total de acuífero H y de la velocidad horizontal $v_{x,0}$ hacen aumentar $l_{x,T}^*$ mientras que un aumento en la difusividad térmica vertical provocaría una disminución en $l_{x,T}^*$. En la sección siguiente se obtendrán, por un lado, las dependencias entre estos parámetros ($v_{x,0}$, H y α) y $l_{x,T}^*$ con los grupos adimensionales obtenidos mediante la técnicas de adimensionalización discriminada y, por otro, las expresiones exactas de estas dependencias (soluciones universales) mediante simulaciones numéricas precisas.

Finalmente, para escenarios de menor extensión horizontal, en los cuales $L < l_{x,T}^*$, L se constituye en sí mismo un parámetro relevante para el control de los patrones y sustituye a $l_{x,T}^*$ como parámetro relevante ($l_{x,T}^*$ no juega ningún papel en dicho problema).

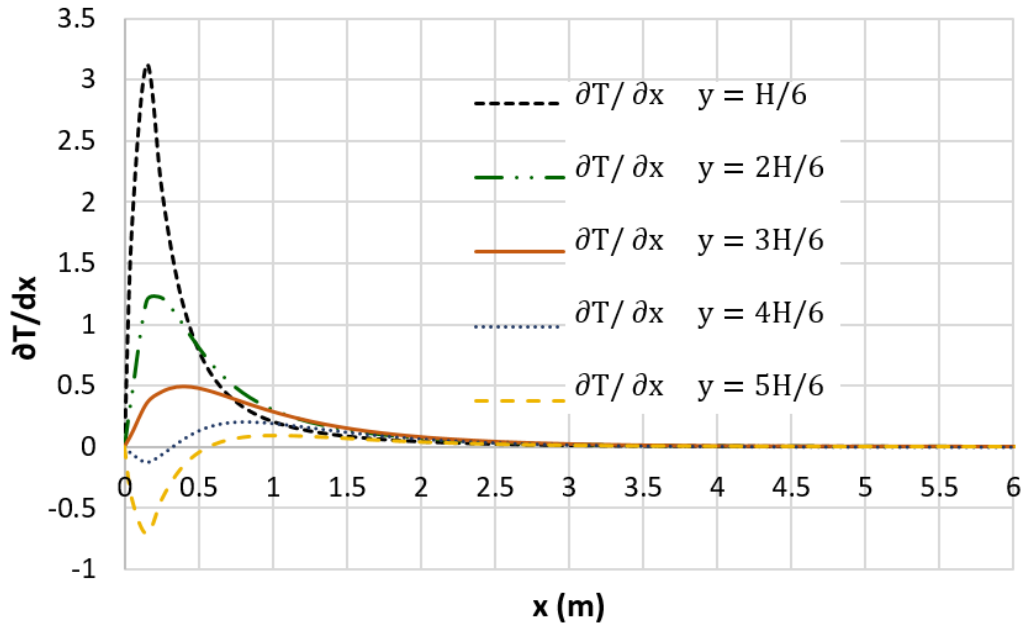


Figura 4.2.5. Valores del gradiente horizontal $\frac{\partial T}{\partial x}$ en el escenario III para $y = \frac{H}{6}, \frac{2H}{6}, \frac{3H}{6}, \frac{4H}{6}$ y $\frac{5H}{6}$ m

Representaciones similares a la de la Figura 4.2.5, se darían para los restantes escenarios. En todas es claramente apreciable que no existen regiones (ni siquiera pequeñas) en las que el gradiente horizontal de temperaturas sea constante. No sólo no lo es, sino que ni siquiera tiene un comportamiento monótono (ya que contiene máximos y/o mínimos) en la región de influencia del flujo en los perfiles verticales de temperatura. Sí está claro que este gradiente tiende a ser nulo en todos los casos a distancias suficientemente alejadas de la entrada de flujo (más allá de la longitud característica térmica) en las que los perfiles verticales de temperatura son poco distinguibles con la posición horizontal y , por tanto, poco útiles para la estimación de velocidades en la forma de problema inverso.

Influencia de la difusividad horizontal

Es necesario ahondar en la influencia de la difusividad horizontal frente a la advección para justificar la hipótesis de despreciar la primera. La comparación entre ambos efectos puede ser cuantificada por el cociente entre los términos asociados de la ecuación (4.2.3), $k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)$ (difusivo) y $\rho_{e,w} c_{e,w} \left(v_{x,o} \frac{\partial T}{\partial x} \right)$ (adectivo), respectivamente. Se trata de uno de los grupos adimensionales que proviene de adimensionalizar la ecuación en el dominio limitado por una longitud característica desconocida, $l_{x,*}$, en la que difusión y advección tiene un valor comparable. Es el grupo

$$\pi_{\text{dif-adv}} = \frac{k}{\rho_{e,w} c_{e,w} v_{x,o} l_{x,*}}$$

De aquí, el valor de la longitud l_x^* viene dado por

$$l_x^* \sim \frac{k}{\rho_{e,w} c_{e,w} v_{x,o}} \quad (4.2.10)$$

Para que el fluido alcance esta cota horizontal se necesita un tiempo de valor $\tau^*(s) = \frac{l_x^*}{v_{x,o}}$. La Figura 4.2.6 muestra las dependencias $l_x^* - \log(v_{x,o})$ y $\tau^* - \log(v_{x,o})$ para valores de difusividad, 10^{-6} y 10^{-7} m^2/s . El efecto difusivo se considera despreciable siempre que l_x^* sea inferior a $l_{x,v}^*$ para tiempos en los que el campo de temperatura ha alcanzado el estado estacionario. Por ejemplo, con un valor típico en suelos de $\frac{k}{\rho_{e,w} c_{e,w}} = 10^{-6}$ m^2/s y una velocidad de flujo de 10^{-5} m/s , de acuerdo con la Figura 4.2.6, l_x^* alcanza un valor de 0.1 m mientras que $\tau^* = 10^4$ s, valores que confirman que la difusividad horizontal es despreciable frente al arrastre. Sin embargo, para una velocidad del agua de 10^{-7} m/s , $l_x^* = 10$ m y $\tau^* = 1157$ d, un tiempo relativamente grande.

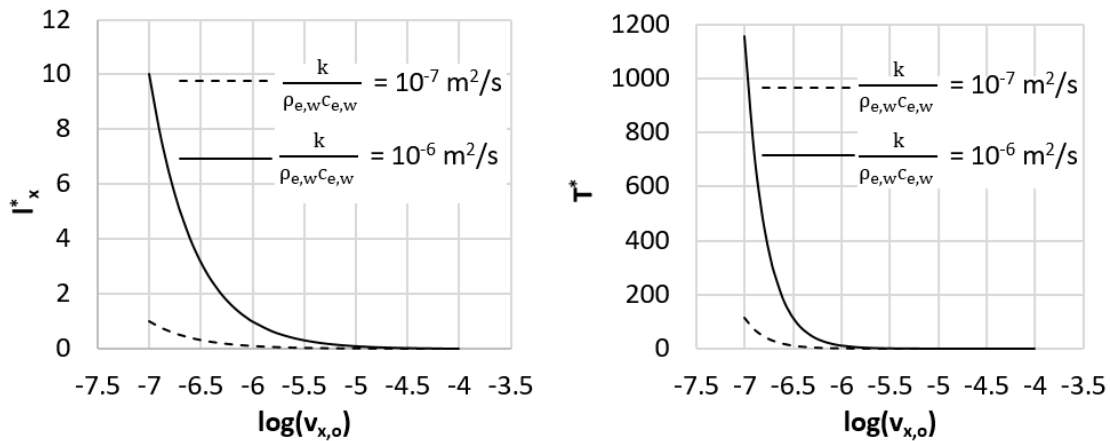


Figura 4.2.6. Dependencias $l_x^* - \log(v_{x,o})$ y $\tau^* - \log(v_{x,o})$

Influencia de la temperatura armónica en la superficie

Es una condición habitual que ajusta las variaciones estacionales, diurnas o anuales, de la temperatura ambiental. Bajo estas condiciones, la difusión vertical causa una entrada y salida de flujos alternantes durante cada semiciclo del periodo de la onda de temperatura, haciendo que tanto la amplitud de la variación armónica de la temperatura en cada punto del dominio como la fase dependan de la profundidad.

Al aumentar la profundidad es de esperar que la amplitud tienda asintóticamente a cero mientras que la fase se incremente progresivamente (Cartwright [1971]). Con ello el acuífero puede ser dividido en dos regiones, una superior de espesor $l_{y,T}^*$, una longitud (o profundidad) característica (definida con un criterio, como veremos después) dentro de la cual los cambios de

temperatura (y fase) son apreciables, y una inferior poco influenciada por las condiciones de contorno armónicas donde la amplitud sería despreciable. La longitud característica dependerá de la difusividad del suelo saturado y del tiempo de duración del semiperiodo de la condición de contorno de temperatura, y crecerá al aumentar el valor de cualquiera de estos parámetros.

Para ilustrar esta longitud vertical, se ha simulado el escenario III con $\Delta T = 1^\circ\text{C}$, $T_{av} = 1^\circ\text{C}$ y un período $\tau_0 = 1$ d. La Figura 4.2.7 muestra, para cada cota de profundidad: i) las envolventes de los valores máximo y mínimo de la temperatura, T_{max} y T_{min} , respectivamente, ii) el valor medio de la temperatura, T_{av} , y iii) la desviación $(T_{max} - T_{min})/2$.

Los medidas de temperatura han sido tomadas en dos localizaciones, una inferior a $l_{x,T}^*$ ($x = 1$ m) y otra superior ($x = 20$ m). Estos perfiles, como ya se ha mencionado, tienden a ser lineales más allá de $l_{x,T}^*$ (líneas continuas) y son claramente diferentes para cada coordenada x por debajo $l_{x,T}^*$ (líneas discontinuas). Sin embargo, la profundidad $l_{y,T}^*$ a la cual ΔT es despreciable es independiente de la posición x . También, mientras que la curvatura de los perfiles de T_{av} depende de la posición horizontal relativa dentro de la longitud característica $l_{x,T}^*$, como ya se ha mencionado, los valores $(T_{max} - T_{min})/2$ son independientes de x .

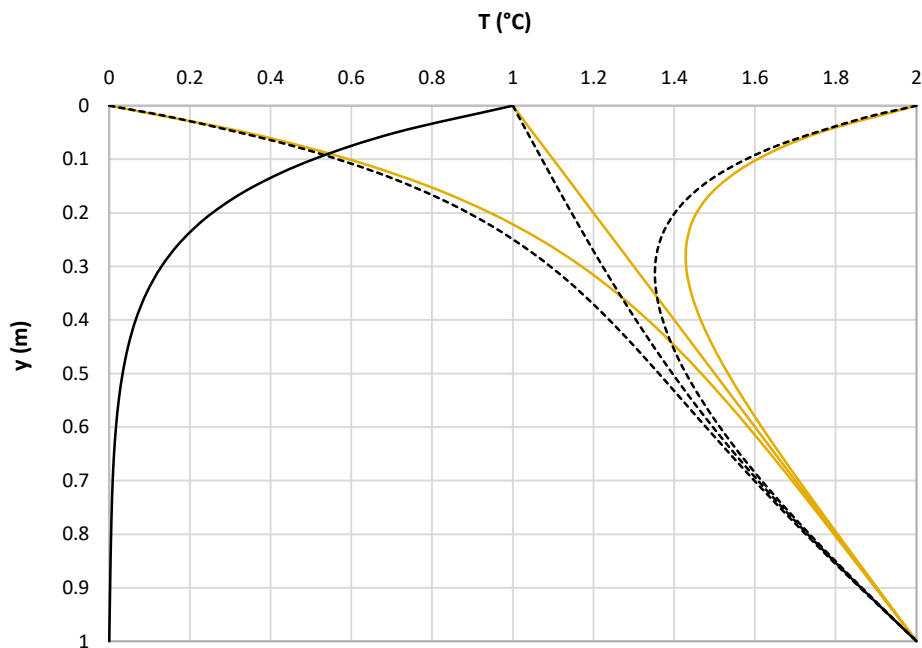


Figura 4.2.7. Envolventes de T_{max} , T_{min} , T_{av} y $(T_{max} - T_{min})/2$ en función de la profundidad. $x = 1$ m (línea discontinua) y $x = 20$ m (línea continua)

4.2.5 Caracterización dimensional. La longitud característica $l_{x,T}^*$

En esta sección se deducirán los grupos adimensionales que rigen la solución de este problema, mediante el proceso de adimensionalización discriminada y normalizada de las ecuaciones de

gobierno que conforman el modelo matemático, y se establecerán las dependencias entre las formas adimensionales de las incógnitas de interés (longitudes características y campo de temperaturas) y tales grupos en base al teorema de pi.

Se discutirá en primer lugar el caso de temperatura de valor constante en la superficie. Las variables relevantes que determinan el campo estacionario de temperaturas en la superficie en un acuífero horizontalmente extenso y asumiendo que la difusividad horizontal es despreciable frente a la advección en la misma dirección, son $\langle H, v_{x,o}, \alpha, T_2 - T_1 \rangle$. Las referencias para definir las variables adimensionales T e y , en forma normalizada, son $(T_2 - T_1)$ y H , respectivamente, mientras que la variable x se va a adimensionalizar con la longitud característica $l_{x,T}^*$, que define la extensión a lo largo de la cual los cambios de temperatura con la posición horizontal son apreciables. De esta forma, los valores de T' , x' e y' (adimensionales) quedan confinados en el rango $[0,1]$ aunque eventualmente se puede asignar a x' valores superiores (e incluso muy superiores) a la unidad, sin que el patrón de temperaturas cambie de manera apreciable para estos valores. Así, las variables adimensionales quedan definidas en la forma

$$T' = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \quad (4.2.11)$$

$$x' = \frac{x}{l_{x,T}^*} \quad (4.2.12)$$

$$y' = \frac{y}{H} \quad (4.2.13)$$

La sustitución de estas variables en la ecuación de gobierno, considerando que se ha alcanzado es estado estacionario $k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \rho_{e,w} c_{e,w} \left(v_{x,o} \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$ conduce a su forma adimensional

$$k_y \frac{(T_2 - T_1)}{H^2} \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} - \rho_{e,w} c_{e,w} v_{x,o} \frac{(T_2 - T_1)}{l_{x,T}^*} \frac{\partial T'}{\partial x'} = 0 \quad (4.2.14)$$

Reagrupando coeficientes se puede escribir esta ecuación en la forma

$$\frac{l_{x,T}^* k_y}{\rho_{e,w} c_{e,w} H^2 v_{x,o}} \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} - \frac{\partial T'}{\partial x'} = 0 \quad (4.2.15)$$

Asumiendo las aproximaciones $\frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \sim \frac{\partial T'}{\partial x'} \sim 1$, la solución sólo depende de un único grupo adimensional que llamaremos $\pi_{l_{x,T}^*}$ por contener la incógnita $l_{x,T}^*$. De hecho, este grupo es la forma adimensional correcta de esta incógnita:

$$\pi_{l_{x,T}^*} = \frac{l_{x,T}^* k_y}{\rho_{e,w} c_{e,w} H^2 v_{x,o}} = \frac{l_{x,v}^* \alpha_m}{H^2 v_{x,o}}$$

Su valor es de orden de magnitud unidad por el propio balance de términos en la ecuación. La solución para la longitud característica es, pues,

$$l_{x,T}^* \sim \frac{H^2 v_{x,0}}{\alpha_m} \quad (4.2.16)$$

Expresión que será verificada más adelante y en la que la proporcionalidad puede escribirse en forma de igualdad

$$l_{x,T}^* = C_1 \frac{H^2 v_{x,0}}{\alpha_m} \quad (4.2.17)$$

con C_1 una constante que puede ser determinada mediante una única simulación numérica, una vez establecido un criterio para definir la longitud $l_{x,T}^*$, por ejemplo, la distancia medida desde el borde de entrada de flujo de agua subterránea, sobre la línea de simetría $y = H/2$, en la cual la temperatura adimensional ha alcanzado el 90 % (ó 95% ó 99%) de su valor estacionario, o el punto en el que el gradiente térmico horizontal $\frac{\partial T}{\partial x}$ alcanza un valor de 0.01 (ó 0.02).

La aplicación de condiciones armónicas de temperatura en la superficie introduce una nueva longitud característica $l_{y,T}^*$, en este caso vertical, independiente de la velocidad del agua y de su temperatura de entrada. De modo que esta longitud puede deducirse de la ecuación

$$k_y \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \rho_e c_e \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.2.18)$$

Introduciendo en ella las variables adimensionales $T' = \frac{T-T_m}{\Delta T}$, $y' = \frac{y}{l_{y,T}^*}$, y $t' = \frac{t}{\tau_0}$, con τ_0 el período la oscilación armónica, la ecuación anterior toma la forma adimensional

$$\frac{\alpha \tau_0}{(l_{y,T}^*)^2} \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} - \frac{\partial T'}{\partial t'} = 0 \quad (4.2.19)$$

que proporciona un único monomio al que llamaremos $\pi_{l_{y,T}^*}$, forma adimensional de la incógnita $l_{y,T}^*$. Su expresión es

$$\pi_{l_{y,T}^*} = \frac{\alpha \tau_0}{(l_{y,T}^*)^2} \quad (4.2.20)$$

y la solución para la longitud o profundidad característica l_y^*

$$l_{y,T}^* \sim \sqrt{\alpha \tau_0} \quad (4.2.21)$$

Introduciendo un criterio concreto para definir esta longitud, por ejemplo, la profundidad a la cual $(T_{\max} - T_{\text{av}})$ es un pequeño porcentaje (1% ó 5%) de su valor en la superficie, la expresión anterior puede ser escrita mediante una igualdad

$$l_{y,T}^* = C_2 \sqrt{\alpha \tau_0} \quad (4.2.22)$$

Donde la constante C_2 (de valor muy cercano a la unidad) puede también determinarse mediante una única simulación numérica (al igual que C_1).

4.2.6 Verificación de las expresiones de las longitudes características $l_{x,T}^*$ y $l_{y,T}^*$

Para verificar las expresiones de $l_{x,T}^*$ y $l_{y,T}^*$ (ecuaciones (4.2.17) y (4.2.22)), se recurre a un conjunto suficiente y representativo de escenarios para los que el valor de los parámetros se muestra en la Tabla 4.2.2.

Se ha asegurado que, en todo ellos, los efectos de la difusión horizontal sean despreciables frente a los del arrastre horizontal o, lo que es lo mismo, que se cumpla la condición $l_x^* \ll l_{x,T}^*$. Las temperaturas del contorno son irrelevantes en la determinación de $l_{x,T}^*$. Los escenarios 1 a 5 permiten verificar la expresión de $l_{x,T}^*$. El valor de uno o más parámetros en estos escenarios ha sido cambiado, pero el valor del monomio $\pi_{l_{x,T}^*}$ se ha mantenido.

Escenario	α_m (m ² /s)	H (m)	$v_{x,0}$ (m/s)	T_3 (°C)	T_1 (°C)	T_2 (°C)	$\pi_{\tau_0^*}$	τ_0 (s)	$\Delta T_{z=0}$ (°C)	$l_{x,T}^*$ (m)	l_y^* (m)
Escenario 1	10^{-7}	1	10^{-5}	0.2	0	1	0.2	-	-	49.50	-
Escenario 2	$4 \cdot 10^{-7}$	2	10^{-5}	0.2	0	1	0.2	-	-	49.50	-
Escenario 3	10^{-7}	2	$(1/4) \cdot 10^{-5}$	0.2	0	1	0.2	-	-	49.50	-
Escenario 4	10^{-7}	2	$(1/4) \cdot 10^{-5}$	0.1	0	0.5	0.2	-	-	49.50	-
Escenario 5	$2 \cdot 10^{-7}$	1	$2 \cdot 10^{-5}$	0.1	0	0.5	0.2	-	-	49.50	-
Escenario 6	10^{-7}	1	10^{-5}	2.2	2	3	0.2	86400	1	49.50	0.25
Escenario 7	$4 \cdot 10^{-7}$	1	10^{-5}	2.2	2	3	0.2	86400	2	12.38	0.5

Tabla 4.2.2. Conjunto de escenarios que permiten verificar las expresiones de $l_{x,T}^*$ y $l_{y,T}^*$

La Figura 4.2.8 muestra la solución del campo estacionario de temperaturas de los escenarios 1 a 5. Como se esperaba, los escenarios 1 a 3 tienen un patrón térmico idéntico, así como los escenarios 3 y 4, los cuales son simplemente un cambio de escala de los primeros. Todos tienen la misma longitud característica. Usando una escala adimensional y normalizada de esta variable

en el centro del acuífero definida en la forma $T' = \frac{T-T_3}{\frac{T_2+T_1}{2}-T_3}$, la Figura 4.2.9 muestra el perfil horizontal de temperaturas de T' en la línea $y = H/2$. Todos los escenarios tienen el mismo perfil, lo que demuestra que la elección de la expresión anterior es idónea para la representación de las soluciones es universales de estos perfiles. El gradiente horizontal de esta temperatura adimensional se muestra en la misma figura y, de nuevo, todos los escenarios tienen la misma solución.

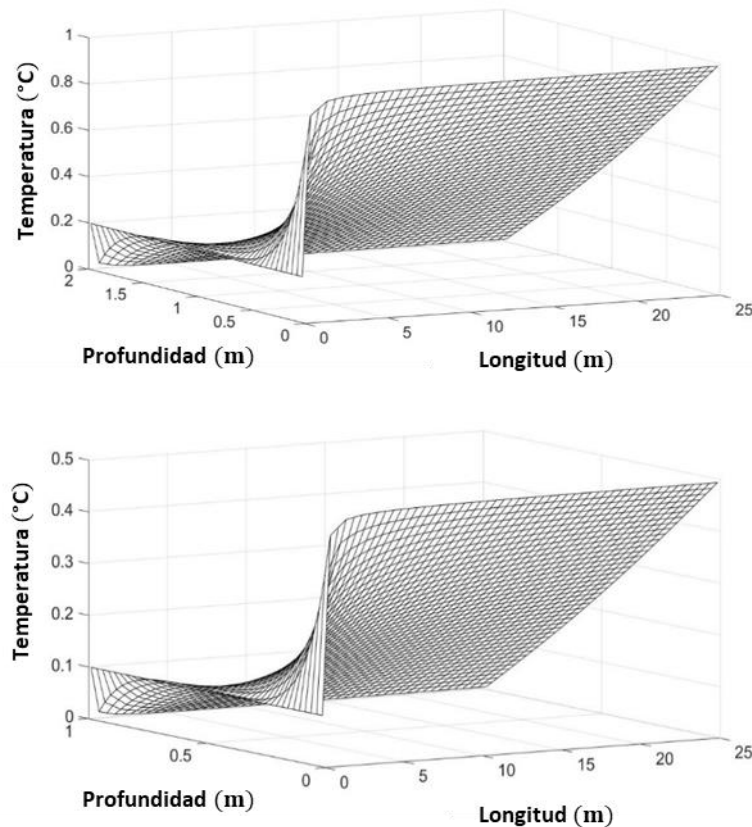


Figura 4.2.8. Patrón (sábanas) de temperaturas de los escenarios 1 y 3 (arriba) y 4 y 5 (abajo)

Elijiendo como criterio para definir $l_{x,T}^*$ la longitud a la cual la temperatura adimensional del perfil (T') ha recorrido el 95% (99%) de su rango total en su línea central, la curva de la Figura 4.2.9 obtenida por simulaciones numéricas da un valor de $l_{x,T}^* = 33.0$ m (49.0 m). Estas longitudes están asociadas con los gradientes horizontales

$$\frac{\partial T'}{\partial x} = 0.01 \quad \text{para} \quad l_{x,v(95\%)}^* = 33.0 \text{ m}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial x} = 0.0021 \quad \text{para} \quad l_{x,v(99\%)}^* = 49.0 \text{ m}$$

Para verificar la expresión de la longitud característica vertical $l_{y,T}^*$ es necesario fijar una variación armónica sinusoidal en la superficie del terreno (Escenarios 6 y 7). Se definirá esta longitud como la profundidad (medida desde la superficie del terreno) en la cual el valor de $(T_{\max} - T_{\text{av}})$ es un 5% (o un 1%) del valor máximo de esta desviación en la superficie. Las soluciones para T_{av} y las envolventes de T_{\max} y T_{\min} se muestran en la Figura 4.2.10.

Los valores de $l_{y,T}^*$ son:

Escenario 6 $l_{y,T}^* = 0.15 \text{ m (95\%)} \quad \gamma \quad l_{y,T}^* = 0.25 \text{ m (99\%)}$

Escenario 7 $l_{y,T}^* = 0.30 \text{ m (95\%)} \quad \gamma \quad l_{y,T}^* = 0.5 \text{ m (99\%)}$

El doble en el escenario 7 como era de esperar. Con todo, se puede escribir

$$l_{y,T(95\%)}^* = C_3 \sqrt{\alpha \tau_0} \quad \gamma \quad l_{y,T(99\%)}^* = C_4 \sqrt{\alpha \tau_0}$$

con $C_3 = 1.61$ y $C_4 = 2.69$.

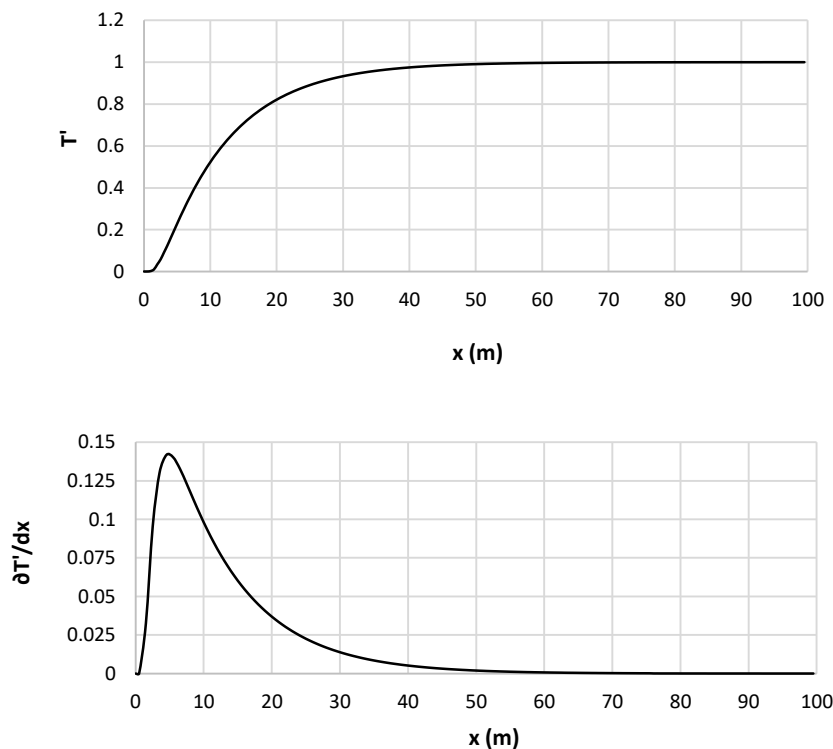


Figura 4.2.9. Perfiles horizontales de temperatura para los escenarios 1 a 5 en $y = H/2$ (arriba).

Perfil horizontal del gradiente horizontal de temperatura en $y = H/2$ (abajo)

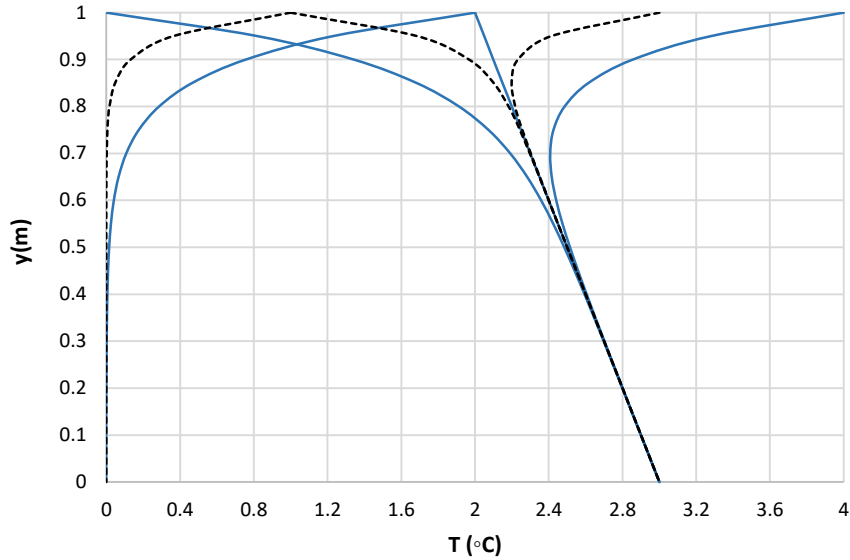


Figura 4.2.10. T_{av} , envolventes de T_{max} y T_{min} así como $(T_{max} - T_{min})/2$ para los escenarios 6 (línea discontinua) y 7 (línea continua azul)

En relación con el campo de temperaturas, y refiriéndonos en primer lugar al caso de temperatura constante en la superficie del terreno, la existencia de tres temperaturas en las fronteras, da lugar a la emergencia inmediata de un monomio que puede elegirse de manera arbitraria como una expresión adimensional que contenga dichas temperaturas. Este monomio eliminaría una de ellas en la expresión adimensional de la solución global del campo de temperaturas en el estacionario. Dada la gran variedad de casos que podrían presentarse en relación con los valores de T_1 , T_2 y T_3 , la construcción de curvas universales de temperatura sería una tarea muy extensa. Nos ceñiremos a los casos que, creemos, se acercan más a situaciones reales en los que T_3 tiene un valor que cae dentro del intervalo $[T_1, T_2]$, presentado casos diferentes a esta hipótesis. El monomio emergente se define en la forma

$$\pi_{T_1, T_2, T_3} = \frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_3} \quad (4.2.23)$$

con lo que sus valores, siempre positivos, quedan confinados al intervalo $[0, \infty]$, cero cuando $T_3 = T_1$, e infinito cuando $T_3 = T_2$. El primero de los extremos parece un caso muy ajustado a escenarios reales. Definiendo la temperatura adimensional en la forma $T'(x, y) = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$, el campo estacionario de temperaturas en la región de interés ($0 \leq x \leq l_{x,T}^*$, $0 \leq y \leq H$), de acuerdo con el teorema de pi, viene dado por

$$T'(x, y) = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \Psi\left(\frac{x}{l_{x,T}^*}, \frac{y}{H}, \frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_3}\right) \quad (4.2.24)$$

Esta expresión puede particularizarse en perfiles horizontales y verticales

$$T'(x)_{\text{perfil vertical}} = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \Psi\left(\frac{x}{l_{x,T}^*}, \frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_3}\right) \quad (4.2.25)$$

$$T'(y)_{\text{perfil horizontal}} = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \Psi\left(\frac{y}{H}, \frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_3}\right) \quad (4.2.26)$$

De acuerdo con estas expresiones, los perfiles verticales pueden representarse mediante ábacos universales en los que cada gráfica, que representa T' frente a la profundidad adimensional y/H , esté asociada a un valor concreto de $\frac{x}{l_{x,T}^*}$ (parámetro del ábaco). Cada ábaco, a su vez, correspondería a un valor diferente de π_{T_1, T_2, T_3} . De igual forma, los perfiles horizontales quedarían recogidos en ábacos en los que cada gráfica, que representa T' frente a $\frac{x}{l_{x,T}^*}$, estaría asociada a un valor concreto de y/H (parámetro del ábaco), y cada ábaco correspondería a un valor de π_{T_1, T_2, T_3} . Dado que los perfiles horizontales son de menor interés, pues, resulta mucho más costoso obtenerlos en campo al tener que construir un gran número de pozos, nos referiremos sólo, a efectos de ilustración, al perfil horizontal correspondiente a la línea central del acuífero $y = H/2$. Teniendo en cuenta que, para esta línea, el rango de temperaturas queda confinado al intervalo $[T_3, \frac{T_1 + T_2}{2}]$, es posible representar este perfil mediante una única curva universal en la forma

$$T'_{\text{perfil horizontal}}(y = \frac{H}{2}) = \frac{T - T_3}{\frac{T_1 + T_2}{2} - T_3} = \Psi\left(\frac{x}{l_{x,T}^*}\right) \quad (4.2.27)$$

Las simulaciones numéricas han demostrado que los perfiles horizontales en líneas situadas a igual distancia por encima y por debajo de $y = H/2$ guardan un tipo especial de simetría para valores π_{T_1, T_2, T_3} en una de las líneas y $\frac{1}{\pi_{T_1, T_2, T_3}}$ en la otra, lo cual parece coherente.

La Figura 4.2.11 representa las superficies universales (expresión (4.2.24)) del campo de temperaturas para las que el monomio π_{T_1, T_2, T_3} toma cinco valores típicos, $\pi_{T_1, T_2, T_3} = 0$ para $T_3 = T_1$, $\pi_{T_1, T_2, T_3} = 0,25$ para $T_3 = \frac{T_2 - T_1}{5}$, $\pi_{T_1, T_2, T_3} = 1$ para $T_3 = \frac{T_2 - T_1}{2}$, $\pi_{T_1, T_2, T_3} = 4$ para $T_3 = \frac{4(T_2 - T_1)}{5}$ y $\pi_{T_1, T_2, T_3} = \infty$ para $T_3 = T_2$. Adviértase que las superficies correspondientes a $\pi_{T_1, T_2, T_3} = 0,25$ y $\pi_{T_1, T_2, T_3} = 4$ pueden obtenerse la una de la otra mediante un giro de 180 grados respecto del eje horizontal (eje x) y modificando la escala vertical de $\frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$ a $1 - \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$.

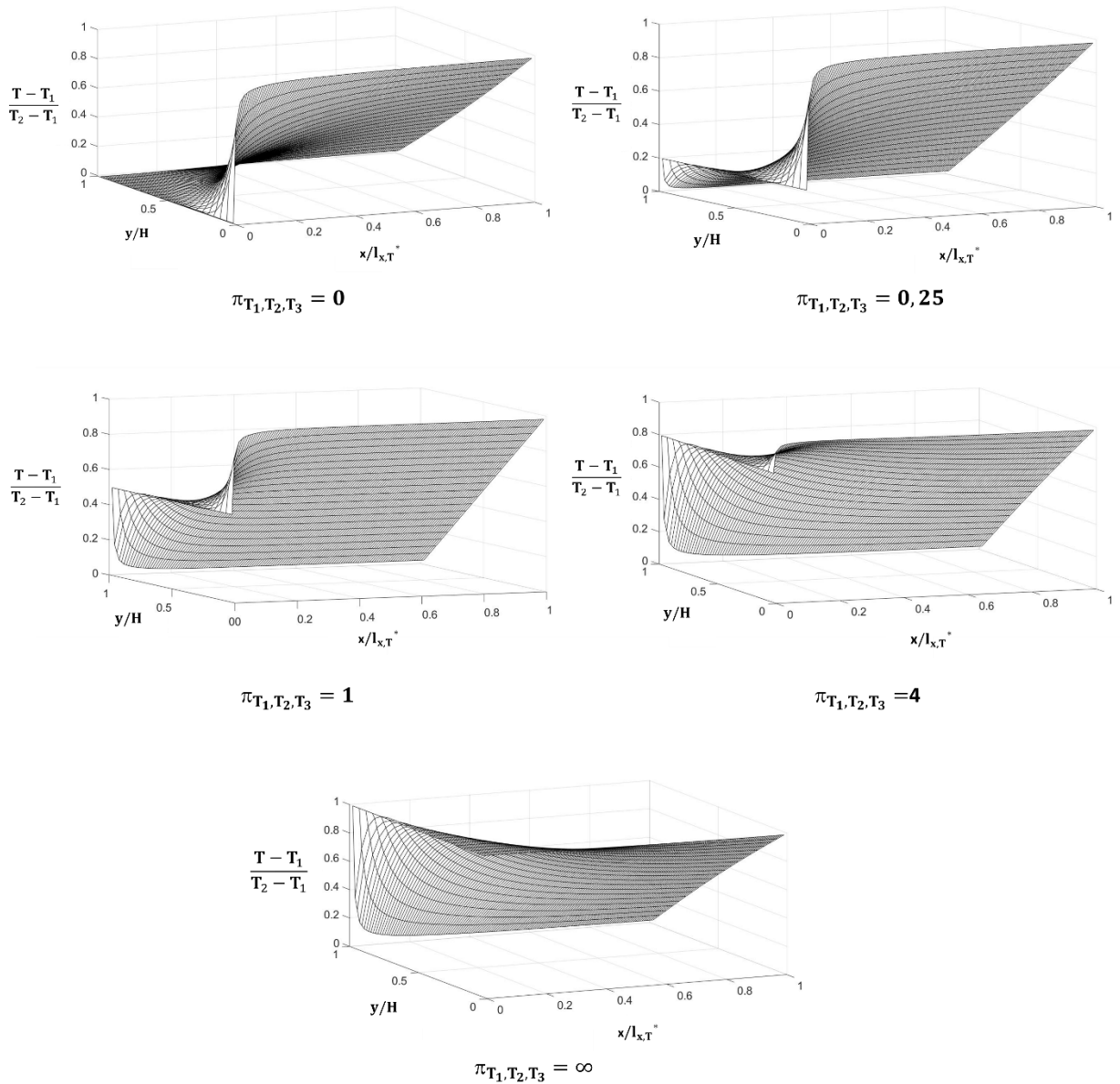


Figura 4.2.11. Superficies universales (expresión (4.2.24)) del campo de temperaturas para

$$\pi_{T_1, T_2, T_3} = 0, \pi_{T_1, T_2, T_3} = 0,25, \pi_{T_1, T_2, T_3} = 1, \pi_{T_1, T_2, T_3} = 4 \text{ y } \pi_{T_1, T_2, T_3} = \infty$$

La Figura 4.2.12 muestra perfiles verticales universales para los que el monomio π_{T_1, T_2, T_3} toma cinco valores típicos, $\pi_{T_1, T_2, T_3} = 0$, $\pi_{T_1, T_2, T_3} = 0,25$, $\pi_{T_1, T_2, T_3} = 1$, $\pi_{T_1, T_2, T_3} = 4$ y $\pi_{T_1, T_2, T_3} = \infty$.

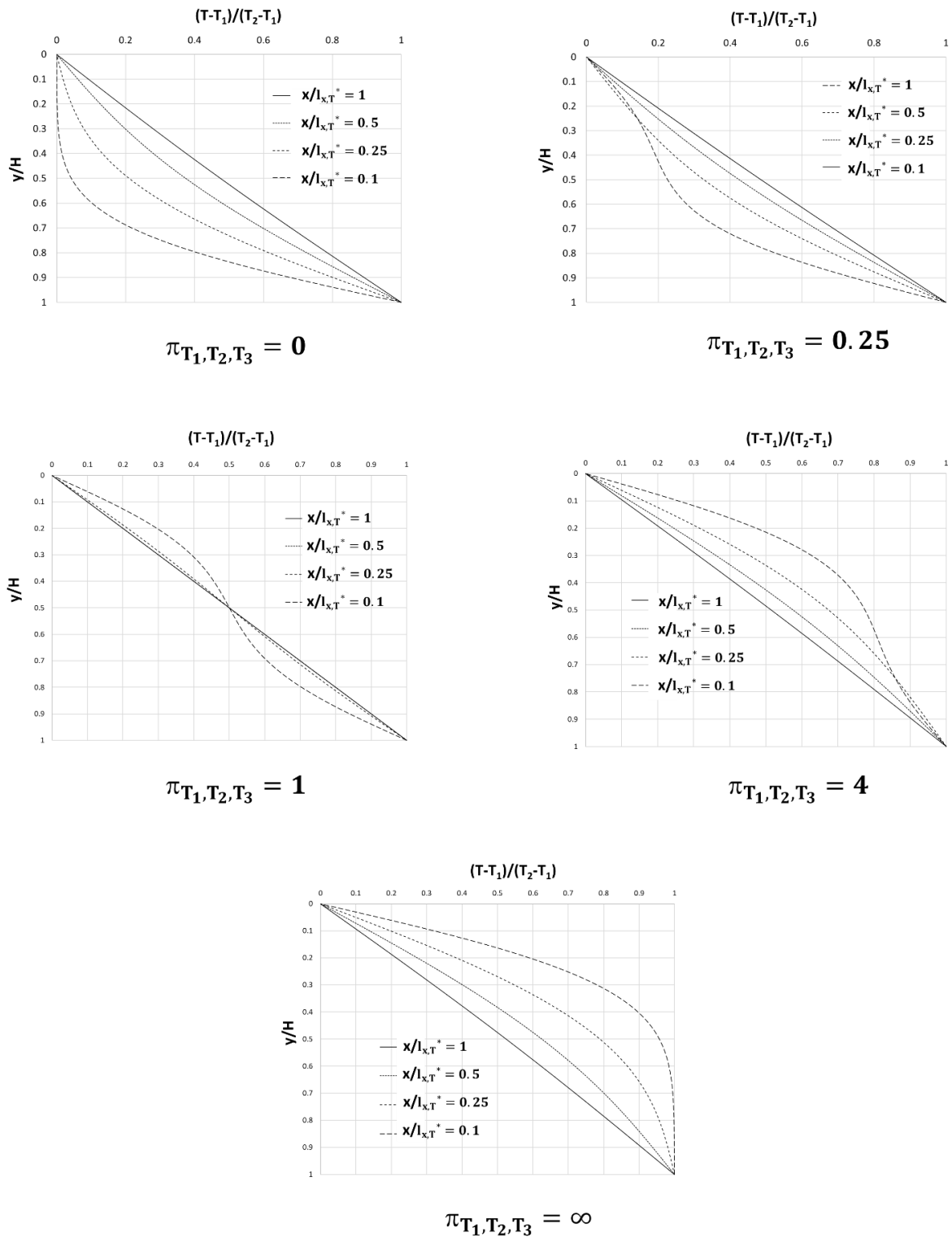


Figura 4.2.12. Perfiles verticales universales de temperatura (expresión (4.2.25)) para

$$\pi_{T_1, T_2, T_3} = 0, \pi_{T_1, T_2, T_3} = 0.25, \pi_{T_1, T_2, T_3} = 1, \pi_{T_1, T_2, T_3} = 4 \text{ y } \pi_{T_1, T_2, T_3} = \infty$$

Se advierte que bastaría con haber dibujado los ábacos correspondientes a valores de π_{T_1, T_2, T_3} dentro del intervalo $[0,1]$ ya que los correspondientes al intervalo $[1, \infty]$ pueden obtenerse de los anteriores. Los cambios de perfil son más acusados, tanto en su valor como en su forma, en

las regiones más cercanas al borde de entrada de agua. Tales perfiles, excepto para los valores límite $\pi_{T_1, T_2, T_3} = 0$ y $\pi_{T_1, T_2, T_3} = \infty$, contienen un punto de inflexión que se desplaza hacia el centro del dominio ($y = H/2$) al crecer el valor de π_{T_1, T_2, T_3} de 0 a 1. Cerca de este límite $\pi_{T_1, T_2, T_3} = 1$, los perfiles son difíciles de discriminar, tanto más, cuanto más lejos nos encontramos de la región de entrada.

Expresando la temperatura adimensional en la forma $T' = \frac{T - T_3}{\frac{T_1 + T_2}{2} - T_3}$, el perfil horizontal de temperaturas en $y = H/2$ es una única curva universal que se muestra en la Figura 4.2.13, expresión (4.2.27). Esta importante gráfica es, sin embargo, de poca utilidad en la práctica ya que su uso requeriría varias perforaciones en el terreno. Los cambios de temperatura adimensional son más apreciables en la región central dentro de la extensión correspondiente a $l_{x,T}$.

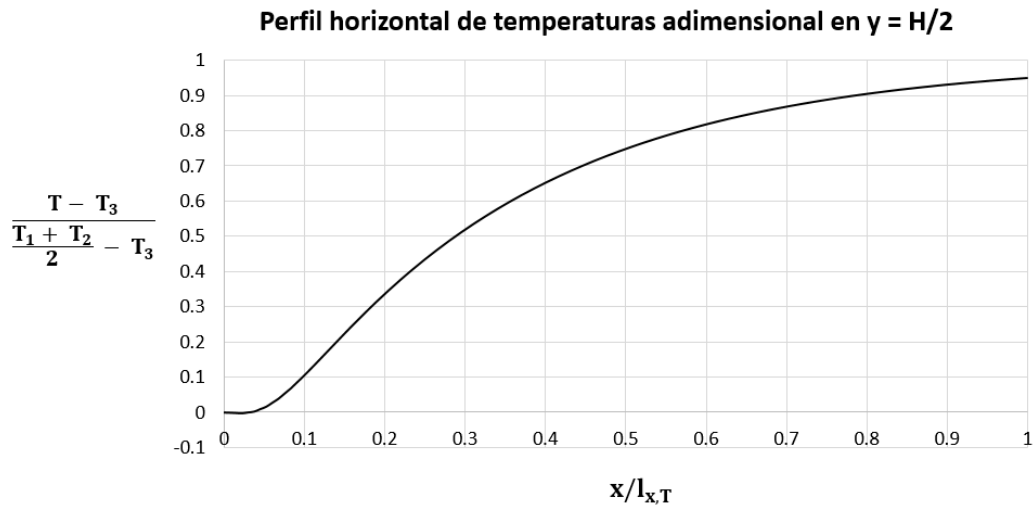


Figura 4.2.13. Perfil horizontal (universal) de temperatura en $y=H/2$ (expresión 4.2.27)

La representación de perfiles en líneas diferentes a $y = H/2$ no puede hacerse con la temperatura adimensional anteriormente definida. En este caso se separa el monomio de temperaturas π_{T_1, T_2, T_3} (como monomio de cada ábaco) y se define la temperatura adimensional en la forma $\frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$. La Figura 4.2.14 representa los perfiles correspondientes a las líneas $y = \frac{H}{4}$, $y = \frac{H}{2}$, e $y = \frac{3H}{4}$, para valores $\pi_{T_1, T_2, T_3} = 0, 0.25, 1, 4$ e ∞ . Cabe introducir comentarios similares a los mencionados para los perfiles verticales, en cuanto a la simetría y forma de estas curvas.

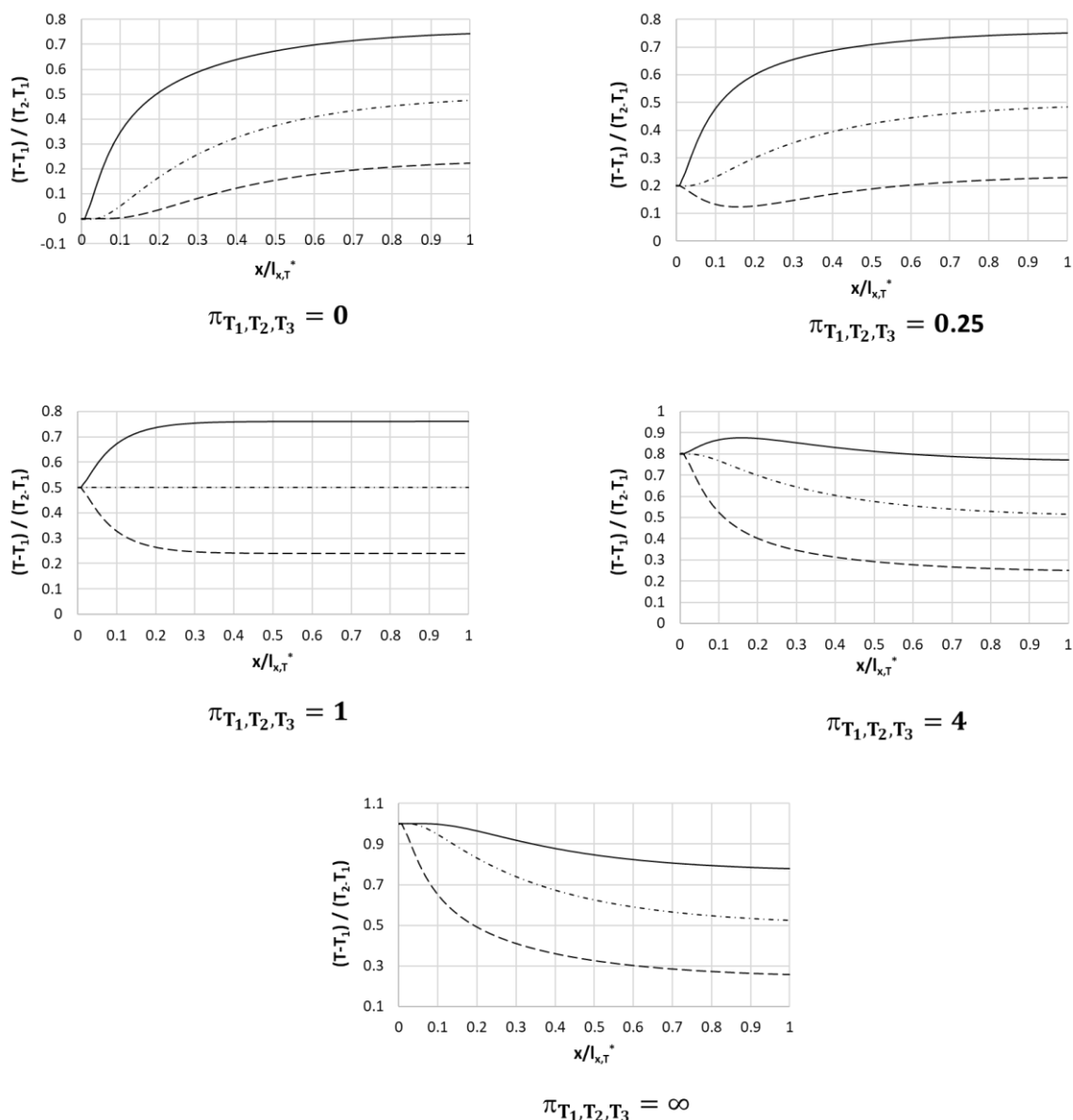


Figura 4.2.14. Perfiles horizontales universales de temperatura.

Línea continua ($y = \frac{3H}{4}$), línea de trazo y punto ($y = \frac{H}{2}$) y línea de trazo discontinuo ($y = \frac{H}{4}$)

Para finalizar, es preciso hacer un comentario relativo a los escenarios en los que su extensión es inferior a $l_{x,T}^*$. Tales escenarios podrían ser reales en el caso de acuíferos poco profundos y/o velocidades pequeñas. Por ejemplo, para $v_{x,0} = 10^{-5}$ m/s, $H = 20$ m y $\alpha = 10^{-6}$ m²/s, resulta $l_{x,T}^* \sim 4$ km, un valor que podría superar a la extensión real del acuífero. En estos casos, cuyo estudio no incluimos en la memoria, la extensión del acuífero (L) es una magnitud relevante que pasa a formar parte de la lista de magnitudes relevantes del problema y $l_{x,T}^*$ no juega papel alguno. Naturalmente, aparecen nuevos monomios sin incógnita de los que dependen el campo de temperaturas y sus perfiles horizontales y verticales.

4.2.7 Contribuciones y conclusiones

El objetivo principal de esta aplicación ha sido la deducción de los grupos adimensionales que controlan la solución o soluciones del problema acoplado de flujo de calor y de fluido simultáneo en medios porosos en el cual la temperatura en la superficie puede ser armónica o constante y la velocidad de flujo es horizontal y de valor constante. Para ello, el procedimiento seguido ha sido el de la adimensionalización discriminada y normalizada de las ecuaciones que integran el modelo matemático, convirtiéndolas en su forma adimensional a través de la adecuada selección de variables adimensionales, una técnica precisa que se aleja formalmente del análisis dimensional clásico. Una vez obtenidos los grupos adimensionales, han sido verificados mediante simulaciones numéricas en un número significativo de escenarios en los cuales uno o más parámetros del problema son modificados, pero reteniendo el mismo valor numérico del monomio. La aparición de una longitud característica horizontal, cuya expresión adimensional depende de los grupos adimensionales que rigen la solución del problema, permite caracterizar los perfiles dentro de esa longitud característica como una función de la posición relativa respecto a dicha longitud.

Por otro lado, para obtener la temperatura adimensional en cualquier punto del dominio, se genera un nuevo grupo adimensional que se puede deducir de las tres temperaturas en el contorno (superficie del terreno, fondo del dominio y borde izquierdo).

Una de las contribuciones más relevantes es la de la demostración de que los gradientes de temperatura horizontales en ningún caso son constantes, como ocurría en los artículos de la literatura. Estos gradientes en realidad son muy cambiantes en una determinada longitud, hasta llegar a tener un valor nulo.

4.3 Tercera aplicación. Flujo horizontal con capa permeable sumergida

4.3.1 Introducción

El escenario actual puede considerarse una variante del anterior ya que en ambos el flujo es horizontal. La existencia de una capa subterránea permeable, estrecha y horizontal por donde circula el fluido incrementa el número de parámetros geométricos del dominio, por lo que se espera que también aumente el número de grupos adimensionales que rige la solución del problema. Se deducen estos grupos siguiendo la técnica de adimensionalización discriminada y normalizada en la que se introducen dos referencias en el problema transitorio: un tiempo característico y una longitud característica a lo largo de la cual se desarrollan los perfiles verticales de temperatura. Aplicando el teorema de pi, se determinan las dependencias de estas

referencias con los parámetros hidráulicos, físicos y geométricos del problema, expresiones que posteriormente se verifican mediante simulaciones numéricas precisas y se representan mediante curvas y ábacos universales. Un sencillo manejo de estas representaciones permite obtener la solución directa del problema para cualquier conjunto de valores de los parámetros que definen el escenario. Al mismo tiempo, estas representaciones sirven de guía para establecer diferentes protocolos de solución del problema inverso que se muestran en el siguiente capítulo.

Algunos escenarios geotérmicos e hidrogeológicos (Bodvarsson [1973], Bodvarsson y col. [1981] y Ziagos y Blackwell [1981]) como el propuesto en esta sección presentan perfiles verticales de temperatura con gradiente térmico positivo en tramos cercanos a de la superficie que cambian (invierten) su signo a profundidades mayores. Inversiones como las del “*northern Oregon Cascade Range*” (Blackwell y col. [1982]) o las del “*Eastern Arizona*” (Reiter y Shearer [1979]) se explican como resultado de la existencia de un flujo horizontal a cierta profundidad que circula por un canal estrecho de material fracturado situado entre capas impermeables. La embocadura o entrada de este canal se supone está en contacto con un acuífero de gran capacidad y temperatura constante.

El problema ha sido estudiado analíticamente y numéricamente por varios autores (Bodvarsson [1969], Chase y O'Dell [1973] y Ziagos y Blackwell [1986]). Bodvarsson [1969] aporta una solución teórica difícil de aplicar matemáticamente, basada en técnicas de inversión de Laplace. Sus hipótesis son demasiado severas para ser aplicables a casos reales: i) no se incluye la condición térmica ambiental en la superficie del suelo, ii) se introduce una fuente térmica plana que impone una temperatura constante en el flujo de agua de la capa permeable y, iii) impone una condición térmica de temperatura constante (primera clase) en el fondo del dominio. Ziagos y Blackwell [1986], en un paper posterior, asumen un escenario de espesor infinito bajo la capa permeable e incluyen el efecto de la temperatura en la superficie del suelo. Su solución es un ajuste de la función complementaria de error a los perfiles característicos y suaves de la temperatura con la profundidad. En base a estos perfiles, los autores justifican la hipótesis de espesor despreciable de la capa permeable en comparación con la profundidad total y conducción térmica horizontal igualmente despreciable en base a un criterio sobre el número de Peclet que implica que la solución es aplicable más allá de una cierta distancia respecto al punto de entrada de flujo de agua en el canal permeable.

En el escenario estudiado en esta sección se propone un dominio de medio poroso rectangular en el que los espesores de las capas impermeables tanto por encima como por debajo de la capa fracturada (permeable) son conocidos. Se asume despreciable o muy pequeño el espesor de la

capa permeable, en comparación con los espesores de las capas impermeables superior e inferior. Las temperaturas de la superficie del terreno y del fondo del dominio, así como la del agua en la embocadura (borde izquierdo del dominio) son conocidas y tienen valores diferentes, presentando condición de contorno de primera clase en estas fronteras. El fluido, con velocidad horizontal constante a lo largo de su recorrido, disminuye progresivamente su temperatura conforme el calor es transferido desde el canal hacia las capas impermeables circundantes (o viceversa) superior e inferior. Bajo estas condiciones, se desarrolla un perfil vertical (con cierta curvatura) de temperaturas estacionarias en una región horizontal cuya extensión depende de los parámetros del problema, perfil que finalmente tiende a tener una forma lineal más allá de esta extensión. Estos perfiles curvos estacionarios se desarrollan durante un transitorio de duración determinada.

4.3.2 Nomenclatura específica

L	longitud horizontal total del dominio (m)
l_1	espesor de la región I (m)
l_2	espesor de la región II (m)
l_3	espesor (despreciable) de la región III (m)
T_1	temperatura en la superficie del terreno (°C)
T_2	temperatura en el fondo del dominio (°C)
T_0	temperatura de entrada del flujo en la capa permeable (Región III) (°C)
v_0	velocidad del agua en la región III

Subíndices

(·) _{est}	relativo al estado estacionario
(·) _{I,II,III}	relativo a las capas I, II y III
(·) _{1,2,3...}	denota diferentes grupos adimensionales o diferentes funciones matemáticas
(·) _{sin flujo}	correspondiente al perfil lineal más allá de l_x^* .
(·) _{t*}	relativo al tiempo característico
(·) _{tran}	relativo al transitorio
(·) _{canal}	relativo a la capa permeable intermedia

Superíndices

(·)'	denota carácter adimensional
(·)*	denota una magnitud característica

4.3.3 Modelos físico y matemático

La Figura 4.3.1 representa un esquema físico del problema en el cual aparecen reflejadas las condiciones térmicas de contorno.

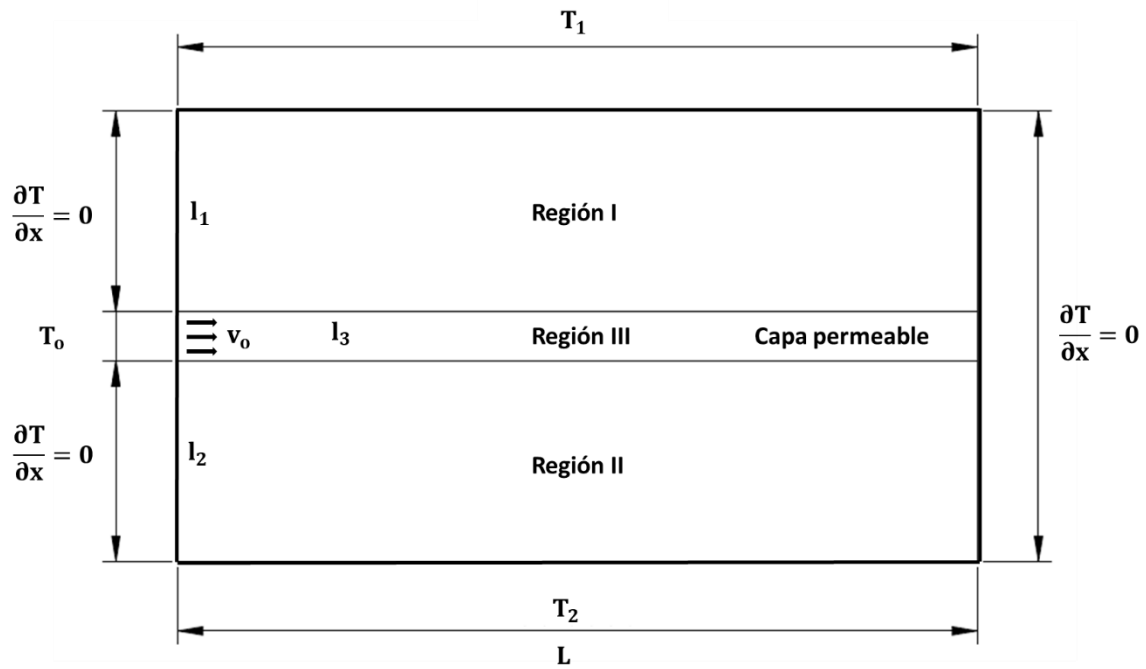


Figura 4.3.1. Esquema físico del problema

Se distinguen tres regiones, dos de conductividad hidráulica despreciable (Regiones I y II) y espesores finitos que envuelven a una tercera (Región III), permeable, horizontal y de espesor despreciable por donde circula el agua. En las Regiones I y II el calor se transmite por conducción (difusión) de calor en ambas direcciones mientras que en la Región III se transmite por conducción y advección (arrastrado con el movimiento del fluido). Las condiciones térmicas de contorno son de primera clase en las fronteras superior e inferior (temperatura constante) mientras que a la izquierda del dominio se impone una condición de segunda clase homogénea (pared adiabática) excepto en la región de entrada de agua (borde izquierdo de la Región III) que vuelve a ser de primera clase. Se adopta un dominio suficientemente extenso horizontalmente como para que la condición térmica del borde derecho no afecte a la región de desarrollo de los perfiles estacionarios de temperatura. De esta forma su condición, de primera o segunda clase, es irrelevante para la región de interés, adoptándose una condición de segunda clase homogénea en el borde derecho. En cuanto las fronteras horizontales entre capas, se impone en todas ellas una condición de temperatura constante (con continuidad del flujo térmico a través de ellas). El dominio es impermeable al agua excepto en los límites izquierdo y derecho del canal permeable donde se impone una condición de flujo de velocidad horizontal conocida y de valor constante.

El modelo matemático del problema está formado por el siguiente conjunto de ecuaciones de gobierno y condiciones de contorno:

Región I:

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho_e c_e \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.3.1)$$

$$T_{(x,y=0)} = T_1 \quad (4.3.2)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(0,0 < y < l_1)} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(x \rightarrow L, 0 < y < l_1)} = 0 \quad (4.3.3)$$

Región II:

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho_e c_e \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.3.4)$$

$$T_{(x,y=H)} = T_2 \quad (4.3.5)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(0, l_1 + l_3 < y < l_1 + l_3 + l_2)} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(x \rightarrow L, l_1 + l_3 < y < l_1 + l_3 + l_2)} = 0 \quad (4.3.6)$$

Región III:

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \rho_{e,w} c_{e,w} v_0 \frac{\partial T}{\partial x} = \rho_e c_e \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.3.7)$$

$$T_{(0, l_1 < y < l_1 + l_3)} = T_0 \quad (4.3.8)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(x \rightarrow \infty, l_1 < y < l_1 + l_3)} = 0 \quad (4.3.9)$$

Las condiciones iniciales de temperatura (necesarias para la solución transitoria) son las que resultan de la solución estacionaria del campo térmico del modelo anterior con una velocidad de flujo nula, $v_0 = 0$ m/s, esto es, un perfil vertical independiente de la posición horizontal, de valor

$$T(x, y) = T_1 + \left(\frac{T_2 - T_1}{H} \right) y \quad (4.3.10)$$

4.3.4 Caracterización dimensional

Grupos adimensionales

La definición de variables adimensionales, discriminadas y normalizadas (con valores dentro del intervalo $[0,1]$), requiere la selección de referencias adecuadas en cada una de las regiones del dominio. Así, la variable "y" se normaliza tomando como referencias los espesores l_1 y l_2 en las Regiones I y II, respectivamente. Como L es suficientemente grande como para no intervenir en los grupos adimensionales, la variable x, común a las dos regiones se normaliza introduciendo la referencia l_x^* , una longitud característica que define la región donde se desarrolla el perfil de temperaturas verticales, con diferencias apreciables de perfil en cada posición horizontal dentro de l_x^* . Más allá de l_x^* dicho perfil es prácticamente lineal, es decir, independiente de la velocidad horizontal del fluido. Como la evolución al perfil lineal es suave, es fácil introducir un

criterio para definir esta longitud característica; por ejemplo, la posición horizontal x , medida en el canal permeable, en la cual se alcanza un porcentaje significativo (90 ó 95 %) de la diferencia $|T_o - T_{\text{est,III,sin flujo}}|$, siendo $T_{\text{est,III,sin flujo}}$ la temperatura estacionaria final en la capa permeable correspondiente al perfil lineal más allá de l_x^* .

Finalmente, en relación con la referencia para la variable tiempo, se introduce un tiempo característico (incógnita) de duración del proceso, t^* , definido como el tiempo que transcurre desde el instante inicial de entrada de agua en la capa permeable hasta el tiempo en que, para $x = l_x^*$, la temperatura alcanza el 95% de $|T_{\text{est,III}} - T_{\text{est,III,sin flujo}}|$.

En suma, las variables adimensionales x' , y' , t' y T' se definen para cada una de las regiones en la forma siguiente:

$$\text{Región I:} \quad x' = \frac{x}{l_x^*} \quad y' = \frac{y}{l_1} \quad t' = \frac{t}{t^*} \quad T' = \frac{T - T_{\text{est,y,sin flujo}}}{T_o - T_{\text{est,y,sin flujo}}}$$

$$\text{Región II:} \quad x' = \frac{x}{l_x^*} \quad y' = \frac{y}{l_2} \quad t' = \frac{t}{t^*} \quad T' = \frac{T - T_{\text{est,y,sin flujo}}}{T_o - T_{\text{est,y,sin flujo}}}$$

$$\text{Región III:} \quad x' = \frac{x}{l_x^*} \quad y' = \frac{y}{l_3} \quad t' = \frac{t}{t^*} \quad T' = \frac{T - T_{\text{est,y,sin flujo}}}{T_o - T_{\text{est,y,sin flujo}}}$$

Introduciendo estas variables en las ecuaciones de gobierno (4.3.1), (4.3.4) y (4.3.7), éstas adquieren su forma adimensional:

$$\text{Región I:} \quad k_x \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2 l_x^{*2}} + k_y \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2 l_1^2} = \rho_e c_e \frac{\partial T'}{\partial (t') t^*} \quad (4.3.11)$$

$$\text{Región II:} \quad k_x \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2 l_x^{*2}} + k_y \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2 l_2^2} = \rho_e c_e \frac{\partial T'}{\partial (t') t^*} \quad (4.3.12)$$

$$\text{Región III:} \quad k_x \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2 l_x^{*2}} + k_y \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2 l_3^2} + \rho_{e,w} c_{e,w} v_o \frac{\partial T'}{\partial x' l_x^*} = \rho_e c_e \frac{\partial T'}{\partial (t') t^*} \quad (4.3.13)$$

Aproximando los factores derivativos de las variables adimensionales a la unidad, las ecuaciones anteriores proporcionan los siguientes coeficientes dimensionales:

$$\text{Región I:} \quad \frac{k_x}{l_x^{*2}} \quad ; \quad \frac{k_y}{l_1^2} \quad ; \quad \frac{\rho_e c_e}{t^*}$$

$$\text{Región II:} \quad \frac{k_x}{l_x^{*2}} \quad ; \quad \frac{k_y}{l_2^2} \quad ; \quad \frac{\rho_e c_e}{t^*}$$

$$\text{Región III:} \quad \frac{k_x}{l_x^{*2}} \quad ; \quad \frac{k_y}{l_3^2} \quad ; \quad \frac{\rho_{e,w} c_{e,w} v_o}{l_x^*} \quad ; \quad \frac{\rho_e c_e}{t^*}$$

A partir de estos coeficientes, se obtienen los siguientes grupos adimensionales para las tres regiones:

$$\begin{aligned} \text{Región I:} \quad \pi_{I,1} &= \frac{l_x^*}{l_1} \quad ; \quad \pi_{I,2} = \frac{\alpha t^*}{l_1^2} \\ \text{Región II:} \quad \pi_{II,1} &= \frac{l_x^*}{l_2} \quad ; \quad \pi_{II,2} = \frac{\alpha t^*}{l_2^2} \\ \text{Región III:} \quad \pi_{III,1} &= \frac{l_x^*}{l_3} \quad ; \quad \pi_{III,2} = \frac{\alpha t^*}{l_3^2} \quad ; \quad \pi_{III,3} = \frac{\rho_{e,w} c_{e,w} v_0}{\rho_e c_e} \frac{v_0}{l_x^*} \end{aligned}$$

Simplificando y reagrupando convenientemente, el resultado global proporciona el siguiente conjunto de seis grupos adimensionales independientes:

$$\pi_1 = \frac{l_1}{l_2}; \quad \pi_2 = \frac{\rho_{e,w} c_{e,w} v_0 l_1}{\rho_e c_e \alpha}; \quad \pi_3 = \frac{l_x^*}{l_1}; \quad \pi_4 = \frac{\alpha t^*}{l_1^2}; \quad \pi_5 = \frac{l_x^*}{l_3}; \quad \pi_6 = \frac{\alpha t^*}{l_3^2}$$

Si se considera que el espesor l_3 es despreciable en comparación con los espesores l_1 y l_2 , los grupos adimensionales π_5 y π_6 desaparecen, con lo que la solución se reduce a cuatro monomios, dos de ellos sin incógnita (π_1 y π_2) y dos de ellos con una incógnita en cada uno (π_3 y π_4); el primero (π_3) constituye la forma adimensional de la incógnita t^* mientras que el segundo (π_4) es la forma adimensional de la longitud característica l_x^* . De acuerdo con el teorema de pi, los grupos adimensionales π_1 y π_2 forman parte, en principio, de los argumentos de la solución de cualquier tipo de incógnita. Así, las soluciones para l_x^* y t^* son:

$$\pi_{l_x^*} = \frac{l_x^*}{l_1} = \Psi_1(\pi_1, \pi_2) = \Psi_1\left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{\rho_{e,w} c_{e,w} v_0 l_1}{\rho_e c_e \alpha}\right)$$

$$\pi_{t^*} = \frac{\alpha t^*}{l_1^2} = \Psi_2(\pi_1, \pi_2) = \Psi_2\left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{\rho_{e,w} c_{e,w} v_0 l_1}{\rho_e c_e \alpha}\right)$$

O lo que es lo mismo,

$$l_x^* = l_1 \Psi_1\left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{\rho_{e,w} c_{e,w} v_0 l_1}{\rho_e c_e \alpha}\right) \quad (\text{A.U. 1}) \quad (4.3.14)$$

$$t^* = \frac{l_1^2}{\alpha} \Psi_2\left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{\rho_{e,w} c_{e,w} v_0 l_1}{\rho_e c_e \alpha}\right) \quad (\text{A.U. 2}) \quad (4.3.15)$$

En relación con el campo de temperaturas en el dominio, su forma adimensional en el estacionario depende de los monomios sin incógnitas π_1 y π_2 , así como de las posiciones relativas x' e y' . La introducción de la longitud característica elimina la dependencia de la temperatura con π_1 y π_2 . Sin embargo, el primero de ellos se mantiene en la dependencia ya que la definición de π_{t^*} incluye el valor de $T_{\text{est},y,\text{sin flujo}}$ que depende del cociente $\frac{l_1}{l_2}$. Con todo, la expresión de dependencia de la temperatura adimensional queda finalmente escrita en la forma

$$\pi_{T'_{est}} = \frac{T - T_{est,y,\sin\text{ flujo}}}{T_o - T_{est,y,\sin\text{ flujo}}} = \Psi_3 \left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{x}{l_x^*}, \frac{y}{l_1 + l_2} \right) \quad (\text{A.U. 3}) \quad (4.3.16)$$

La solución del campo transitorio de temperaturas es una extensión de la anterior que debe incluir la forma adimensional del tiempo relativo,

$$\pi_{T'_{tran}} = \frac{T - T_{est,y}}{T_o - T_{est,y}} = \Psi_4 \left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{x}{l_x^*}, \frac{y}{l_1 + l_2}, \frac{t}{t^*} \right) \quad (\text{A.U. 4}) \quad (4.3.17)$$

Las temperaturas estacionarias y transitorias en el canal permeable se extraen directamente de las expresiones anteriores:

$$\pi_{T'_{est,\text{canal}}} = \frac{T - T_{est,\text{canal}}}{T_o - T_{est,\text{canal}}} = \Psi_5 \left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{x}{l_x^*} \right) \quad (\text{A.U. 5}) \quad (4.3.18)$$

$$\pi_{T'_{tran,\text{canal}}} = \frac{T - T_{est,\text{canal}}}{T_o - T_{est,\text{canal}}} = \Psi_6 \left(\frac{l_1}{l_2}, \frac{x}{l_x^*}, \frac{t}{t^*} \right) \quad (\text{A.U. 6}) \quad (4.3.19)$$

4.3.5 Verificación de los resultados

Para comprobar la veracidad de la expresión obtenida para la dependencia de l_x^* , ecuación (4.3.14), se simularán los casos I y II de la Tabla 4.3.1. En ellos, los parámetros físicos y/o geométricos de cada caso han sido convenientemente modificados para que los grupos adimensionales $\frac{l_1}{l_2}$ y $\frac{\rho_{e,w} c_{e,w} v_o l_1}{\rho_e c_e \alpha}$ retengan el mismo valor en ambos.

Como se esperaba, el grupo $\frac{l_x^*}{l_1}$ (forma adimensional de la longitud característica) retiene también el mismo valor. Por otro lado y siguiendo el mismo razonamiento para el tiempo característico, ecuación (4.3.15), el grupo $\frac{t^* \alpha}{l_1^2}$ debe tener el mismo valor para ambos casos por lo que el tiempo característico del caso I debe ser doble que el del caso II. Estos resultados se han confirmado mediante simulaciones numéricas.

Caso	l_1 (m)	l_2 (m)	α (m ² /s)	v_o (m/s)	$\rho_{e,w} c_{e,w}$ (cal/(m ³ °C))	l_x^* (m)	τ^* (s)
I	3.6	6	10 ⁻⁶	5·10 ⁻⁶	10 ⁶	21.35	4.42·10 ⁷
II	7.2	12	2·10 ⁻⁶	2.5·10 ⁻⁶	2·10 ⁶	42.7	8.84·10 ⁷

Tabla 4.3.1. Valores de los parámetros de los casos I y II

4.3.6 Ábacos universales

Las dependencias (A.U. 1) a (A.U. 6), ecuaciones (4.3.14) a (4.3.19), constituyen expresiones universales en forma de ábacos cuyo uso permite obtener la solución directa de cualquier escenario. Las Figuras 4.3.2 y 4.3.3, obtenidas mediante un gran número de simulaciones

numéricas, muestran la dependencia de la longitud característica y del tiempo, respectivamente, con los grupos adimensionales.

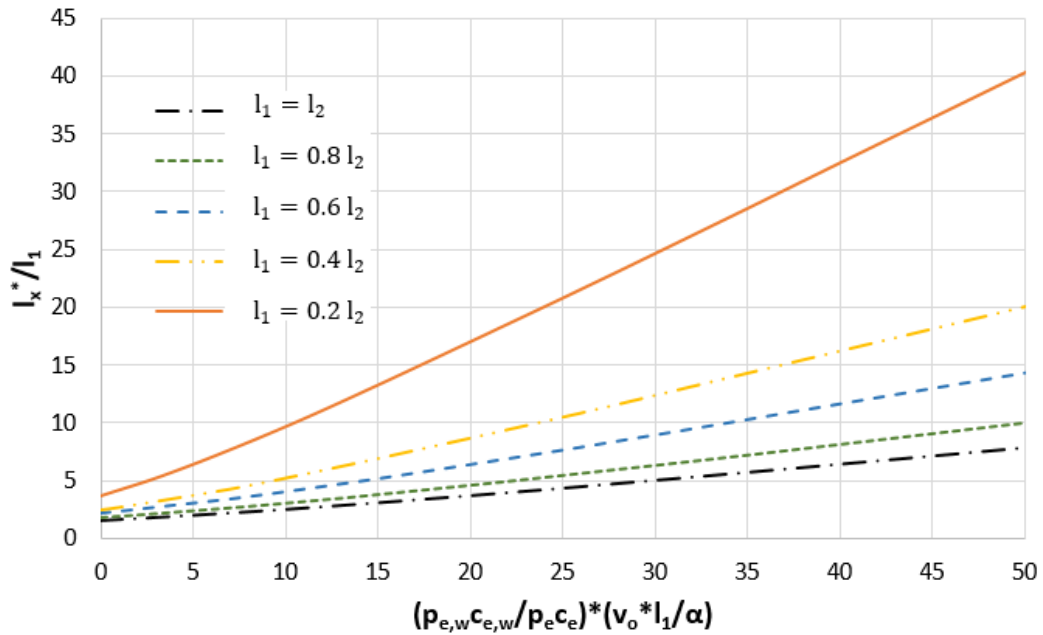


Figura 4.3.2. Ábacos universales de la longitud característica (A.U. 1), ecuación (4.3.14)

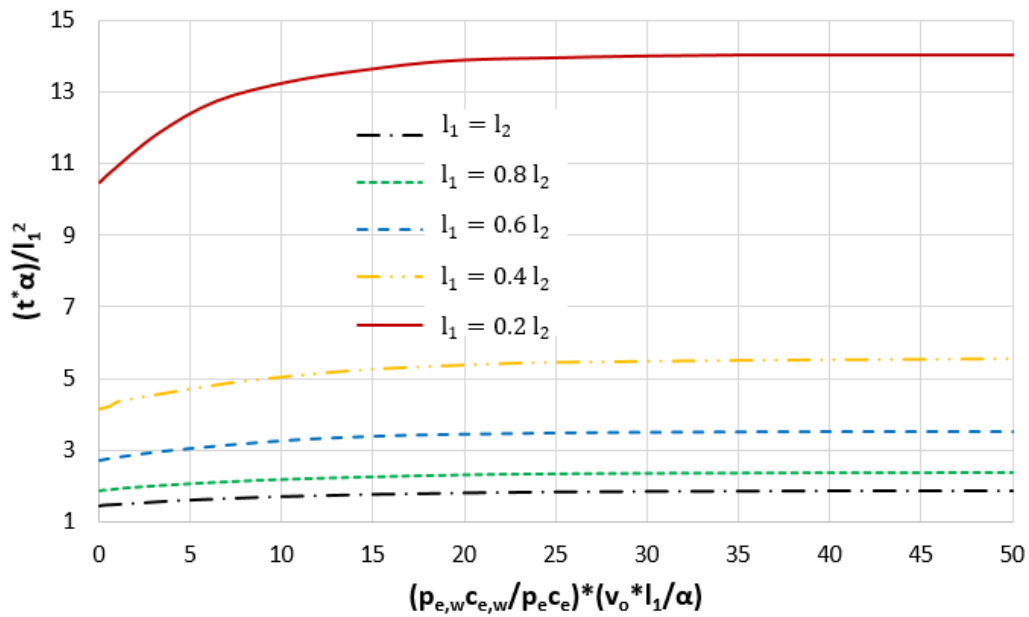


Figura 4.3.3. Ábacos universales del tiempo característico (A.U. 2), ecuación (4.3.15)

En ambos casos, los ábacos están formados por líneas casi rectas que muestran una pequeña curvatura en la región donde el orden de magnitud de π_2 es superior a la unidad, región en la que los efectos de arrastre son predominantes frente a los de conducción. Se han representado

cinco valores del cociente de longitudes, $\frac{l_1}{l_2} = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 1 , ya que valores de $\frac{l_1}{l_2}$ mayores a la unidad (poco reales en la práctica) son complementarios a los representados en la figura.

El conjunto de ábacos para la temperatura adimensional estacionaria (A.U. 3), ecuación (18), se representa en la Figura 4.3.4.

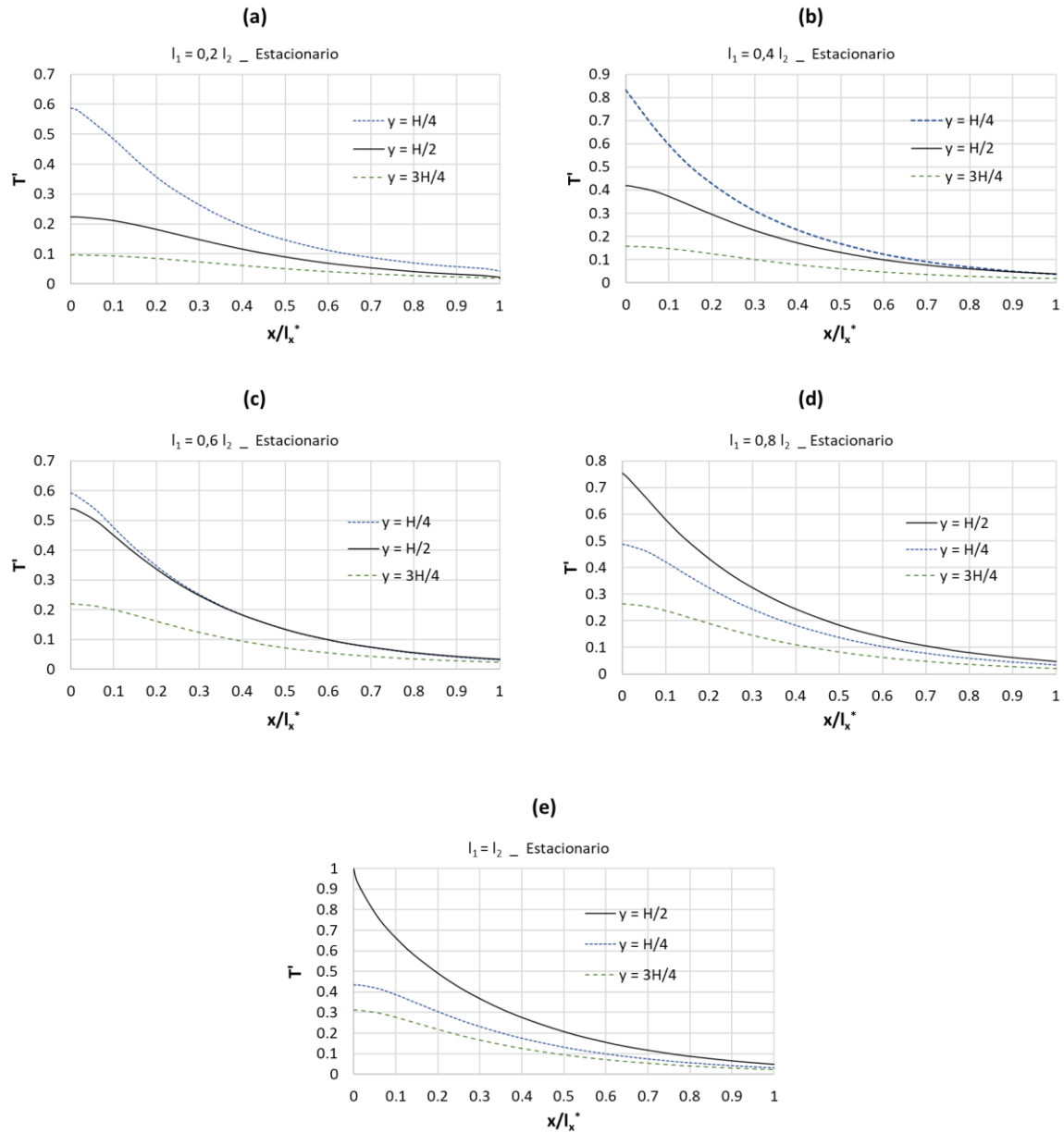


Figura 4.3.4. Ábacos de la temperatura adimensional estacionaria (A.U. 3), ecuación (4.3.16).

$$\frac{l_1}{l_2} = 0.2 \text{ (a)}, 0.4 \text{ (b)}, 0.6 \text{ (c)}, 0.8 \text{ (d)} \text{ y } 1 \text{ (e)}, \frac{y}{l_1+l_2} = 0.25, 0.5 \text{ y } 0.75$$

Los valores de los grupos adimensionales, $\frac{l_1}{l_2} = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ y 1 , y $\frac{y}{l_1+l_2} = 0.25, 0.5$ y 0.75 recogen un gran espectro de casos reales. La desviación relativa entre curvas de un mismo ábaco depende de la localización del canal permeable. Por otro lado, el máximo valor de la

temperatura adimensional normalizada ocurre para el caso en que $l_1 = l_2$. Fuera del canal las curvas no alcanzan el valor de la unidad para la temperatura adimensional. En la posición $y = \frac{H}{4}$, los perfiles de temperatura horizontal están por debajo de los de la posición $y = \frac{H}{2}$ en los casos $l_1 = l_2$ y $l_1 = 0.8 l_2$, mientras que para la misma posición ($y = \frac{H}{4}$) dichos perfiles están por encima de los que se dan en $y = \frac{H}{2}$ en el resto de los casos, ya que la posición $\frac{H}{4}$ está más cercana al canal que la posición $\frac{H}{2}$ en estos casos. Finalmente, los conjuntos de ábacos correspondientes a la temperatura adimensional durante el transitorio, para $\frac{t}{\tau^*} = 0.25$ y 0.5 , se muestran en las Figuras 4.3.5 y 4.3.6, respetivamente. Las curvas son muy similares en forma a aquellas correspondientes a la solución estacionaria, Figura 4.3.4.

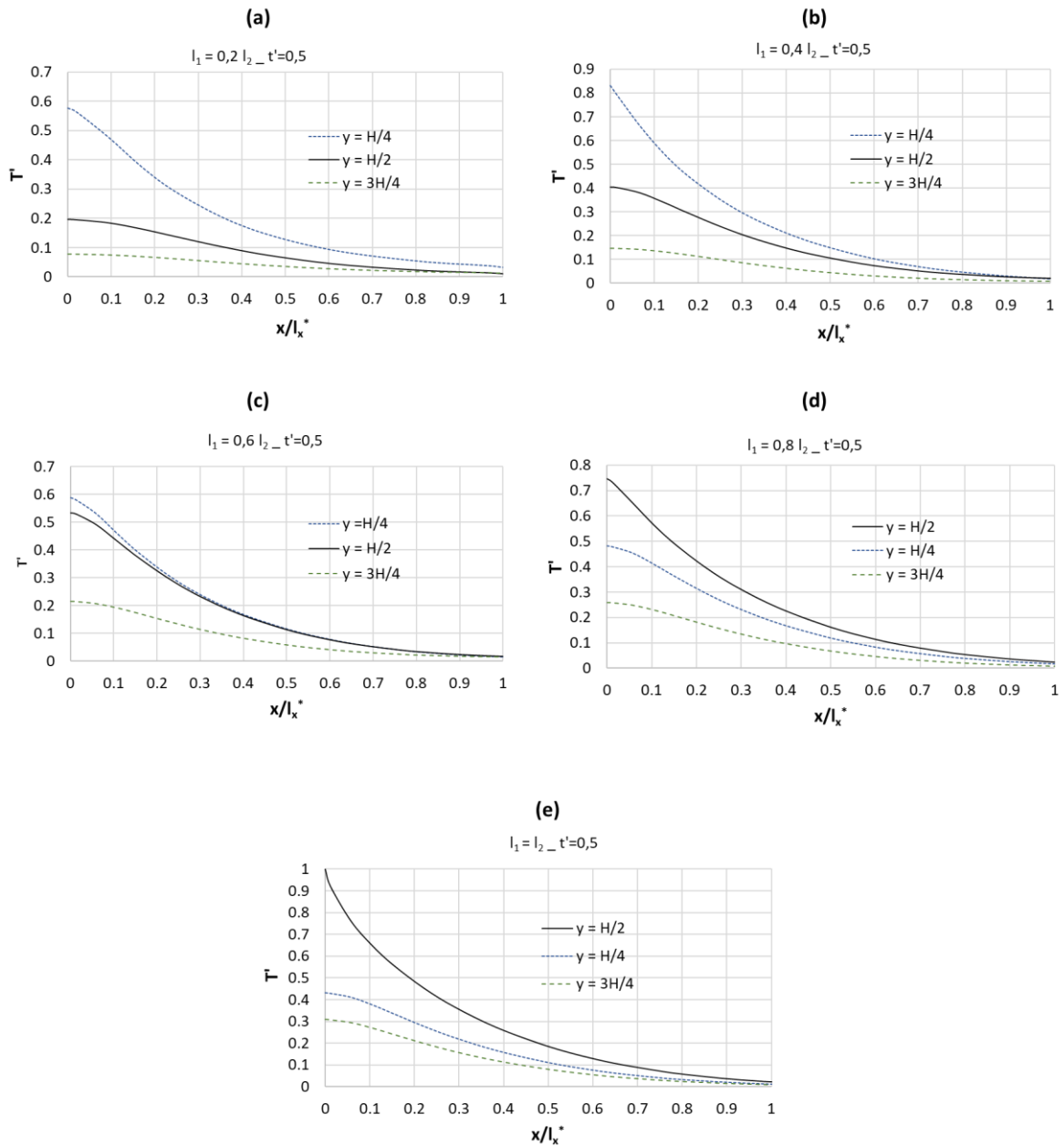


Figura 4.3.5. Ábacos correspondientes a la temperatura transitoria adimensional (A.U. 4), ecuación (4.3.17). $\frac{t}{\tau^*} = 0,5$, $\frac{l_1}{l_2} = 0,2$ (a), 0,4 (b), 0,6 (c), 0,8 (d) y 1 (e), $\frac{y}{l_1+l_2} = 0,25, 0,5$ y 0,75

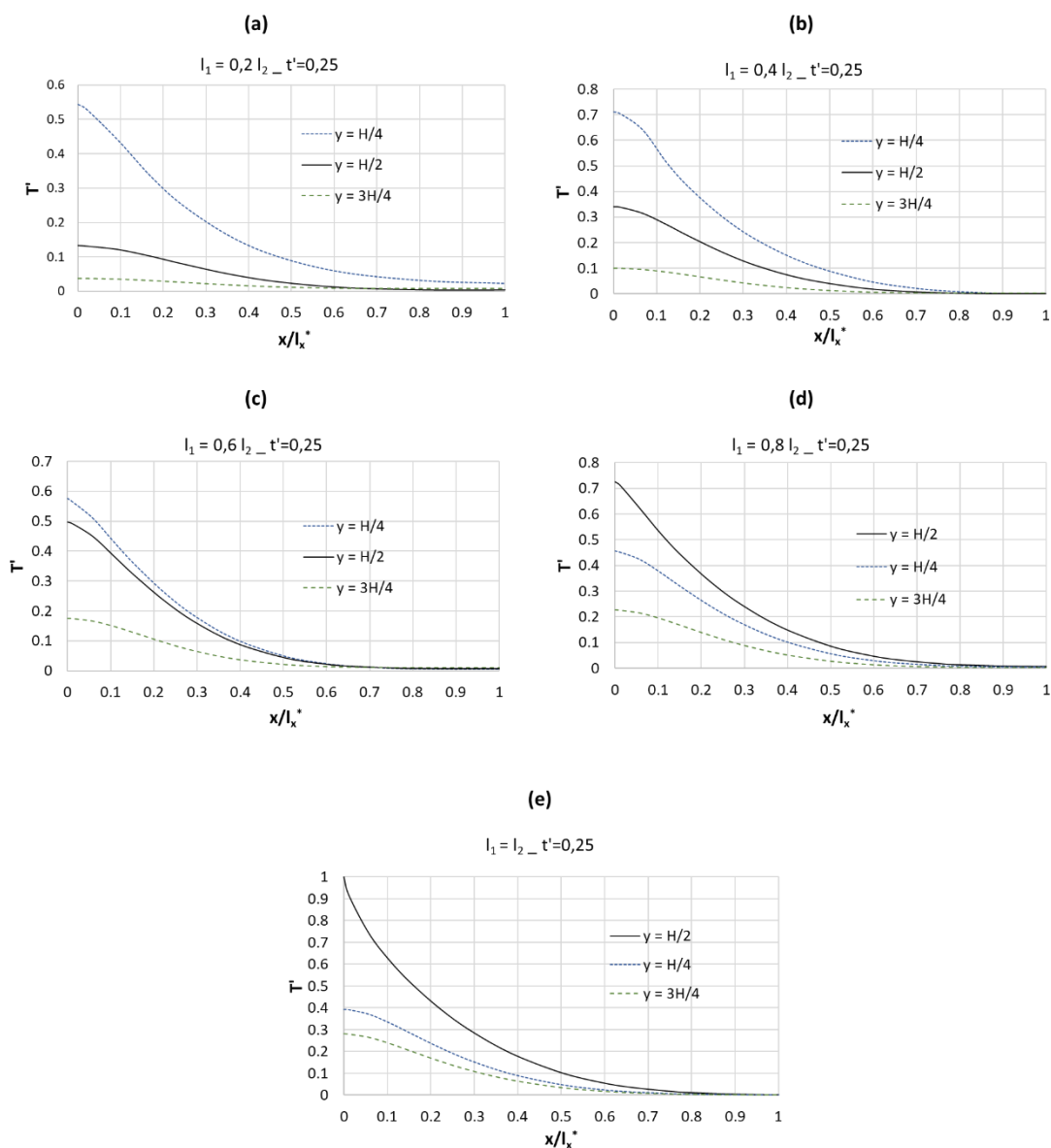


Figura 4.3.6. Ábacos correspondientes a la temperatura transitoria adimensional (A.U. 4), ecuación (4.3.17). $\frac{t}{\tau^*} = 0,25$, $\frac{l_1}{l_2} = 0,2$ (a), 0,4 (b), 0,6 (c), 0,8 (d) y 1 (e), $\frac{y}{l_1+l_2} = 0,25, 0,5$ y 0,75

Puede advertirse que cuando se expresa la escala de temperaturas en forma adimensional, las desviaciones durante el transitorio son muy pequeñas incluso para tiempos del orden de $t' = 0,5t^*$, lo que se debe indudablemente al alto porcentaje elegido para definir el tiempo característico (95%).

No se han incluido nuevos ábacos para longitudes y tiempos característicos elegidos con otros criterios por no aumentar la extensión de la memoria. Los resultados nos permiten establecer los criterios idóneos para definir protocolos de problema inverso en estos escenarios. El Capítulo 5 presenta estos protocolos y ejemplos ilustrativos de sus aplicaciones.

4.3.7 Contribuciones y conclusiones

Se parte de un escenario 2D en el cual el calor se transfiere desde una capa subterránea, horizontal, estrecha y permeable hacia el terreno circundante o viceversa. Se han buscado las dependencias de las incógnitas más relevantes y de mayor interés sobre los parámetros físicos y geométricos involucrados. Dichas dependencias se representan por medio de curvas universales que son utilizadas en el protocolo de problema inverso para la estimación de la velocidad del fluido a través de la capa permeable a partir de mediciones de temperatura (transitorias o estacionarias) a diferentes profundidades. Se asume que el espesor del canal o capa permeable es despreciable en comparación con el espesor de las Regiones I y II.

Dado que las dependencias buscadas entre incógnitas y parámetros del problema están respaldadas por el teorema de π , se requiere una técnica precisa para la búsqueda de los grupos adimensionales que gobiernan el problema. Se ha optado por el proceso de adimensionalización discriminada y normalizada del modelo matemático. La introducción de una longitud característica horizontal a lo largo de la cual los perfiles verticales de temperatura se desarrollan, para adimensionalizar la coordenada horizontal y de un tiempo característico que marca la duración del período transitorio, para adimensionalizar el tiempo, permite estimar de forma directa las dependencias de las formas adimensionales de éstas dos incógnitas (tiempo y longitud característicos) sobre el resto de grupos (sin incógnitas) del problema.

Una vez comprobadas todas las dependencias deducidas mediante un número considerable de simulaciones numéricas, se representan mediante curvas y ábacos universales que pueden utilizarse para la solución de cualquier escenario de forma sencilla. El rango numérico de los grupos adimensionales en estos gráficos, de manera particular el de aquellos que representan un equilibrio entre los términos de la ecuación, asegura que se puedan aplicar a cualquier escenario real.

4.4 Cuarta aplicación. Flujo oblicuo

4.4.1 Introducción

De Nuevo, el protocolo de adimensionalización discriminada y normalizada de las ecuaciones de gobierno ha conducido al conjunto más preciso de grupos adimensionales independientes que rigen la solución del problema acoplado de flujo y transporte en suelos saturados donde la velocidad de flujo de agua subterránea tiene componentes vertical y horizontal, es decir, el flujo es oblicuo.

Los escenarios con flujo oblicuo no han sido apenas estudiados cuantitativamente. Lu y Ge [1996] proporcionan soluciones analíticas del campo térmico en el estacionario bajo condiciones de flujo oblicuo de velocidad constante con una hipótesis que podríamos calificar de severa y poco realista: la asunción de un gradiente térmico horizontal constante en todo el dominio. Esta hipótesis no es compatible con las condiciones usuales (armónica o no) de temperatura en la superficie y fondo del acuífero, que suelen ser de primera clase y conducen a un gradiente térmico nulo en puntos suficientemente alejados del borde de entrada de agua. Hasta donde sabemos, no existe ningún trabajo posterior a 1996 en donde se hayan aplicado las soluciones analíticas propuestas por estos autores.

En esta sección se estudian dos problemas diferentes. Uno aplicable a suelos térmicamente isótropos en los que el campo de velocidades oblicuo es constante (ambas componentes), y otro aplicable a suelos hidráulicamente anisótropos en los que el campo de velocidades viene impuesto por condiciones de potencial hidráulico constante en las fronteras del medio poroso. Como en las anteriores aplicaciones y sobre la base de razonamientos físicos acerca de los fenómenos involucrados en el problema, se introducen longitudes características asociadas al desarrollo de los perfiles térmicos (y de velocidad en su caso) y se establece la dependencia de éstas con los grupos adimensionales obtenidos. Una vez son verificadas estas dependencias y con el auxilio de las simulaciones numéricas necesarias (haciendo uso de un simulador de circuitos eléctricos como Ngspice o de un software comercial como MODFLOW y MT3DMS), se representan gráficamente mediante curvas, ábacos o incluso superficies que constituyen las soluciones universales capaces de dar respuesta inmediata a cualquier escenario del problema.

En el problema de flujo oblicuo constante, las temperaturas en la superficie y en el fondo del dominio son conocidas y de valor constante (condiciones de contorno de primera clase); se conoce también la temperatura de entrada del agua (en el borde izquierdo) y el dominio es lo suficientemente extenso como para permitir el desarrollo de los perfiles de temperatura por completo sin verse afectados por la condición térmica en la región de salida (borde derecho). Con ello, la extensión del dominio queda separada en dos regiones, una primera en la que los perfiles de temperatura dependen de la posición horizontal y de las componentes vertical y horizontal de la velocidad del agua y una a continuación en la que las temperaturas sólo dependen de la profundidad y de la componente vertical de la velocidad. La medida de perfiles temperatura-profundidad en la segunda región permitiría estimar la componente vertical de la velocidad de flujo y con ellas, y a partir de medidas de perfiles verticales de temperatura en la primera región se podría estimar la componente horizontal de la velocidad.

En el escenario de potenciales hidráulicos constantes y medios hidráulicamente anisótropos, más complejo y realista que el primero, el campo de velocidades no es constante sino consecuencia de la aplicación de los potenciales y los valores de la conductividad hidráulica. El agua entra por la izquierda y por el fondo del dominio y sale por los contornos superior y derecho. Las condiciones de contorno térmicas son de temperatura constante en las fronteras de entrada de agua y en la superficie del terreno. Por otra parte, el dominio es suficientemente extenso horizontalmente como para que la condición térmica en el mismo permita el desarrollo de los perfiles de velocidad y temperatura hasta hacerse independientes de la posición horizontal y de la componente horizontal de la velocidad del flujo oblicuo. Como en el problema de flujo oblicuo de velocidad constante, existen dos regiones para el campo de temperaturas, una de desarrollo del perfil estacionario y otra de perfil constante. Sin embargo, también existen dos regiones para el campo de velocidades, una primera de desarrollo del perfil de velocidades seguida de otra en la que el perfil es independiente de la posición horizontal. Las regiones de desarrollo de ambos perfiles (de velocidad y térmico) no son necesariamente del mismo tamaño, si bien el perfil de velocidades ha de desarrollarse en una extensión más corta porque el problema mecánico está desacoplado del térmico.

4.4.2 Nomenclatura específica

h_1	potencial hidráulico en el fondo y en el borde izquierdo del dominio para el escenario de potenciales hidráulico constantes
h_2	potencial hidráulico en la superficie del terreno y en el borde derecho del dominio para el escenario de potenciales hidráulico constantes
l_x^*	longitud característica en el escenario de flujo oblicuo constante (m)
$l_{x,v}^*$	longitud característica en el escenario de potenciales hidráulicos constantes (m)
$l_{x,T}^*$	longitud característica térmica en el escenario de potenciales hidráulicos constantes (m)
L	longitud total del dominio (m)
T_1	temperatura en la superficie del terreno (°C)
T_2	temperatura en el fondo del dominio (°C)
T_3	temperatura en el borde izquierdo del dominio (°C)
\vec{v}	vector de la velocidad del flujo de agua (m/s)
v	velocidad del flujo de agua (m/s)
$\alpha_{Lu\&Ge}$	grupo adimensional $\frac{\rho_{e,w} c_{e,w} V_x L}{k_m}$
β	grupo adimensional $\frac{\rho_{e,w} c_{e,w} V_z L}{k_m}$
γ	gradiente de temperatura horizontal impuesto en el problema de Lu y Ge [1996]
λ	gradiente de temperatura media vertical en el problema de Lu y Ge [1996]

$[\]$	denota intervalo
$ \ $	denota valor absoluto
\propto	denota proporcionalidad

Subíndices

$(\cdot)_{1,2,3\dots}$	denota diferentes grupos adimensionales o diferentes funciones matemáticas
$(\cdot)_{\text{est}}$	denota estado estacionario
$(\cdot)_{\frac{H}{2}}$	denota la posición central del dominio

Superíndices

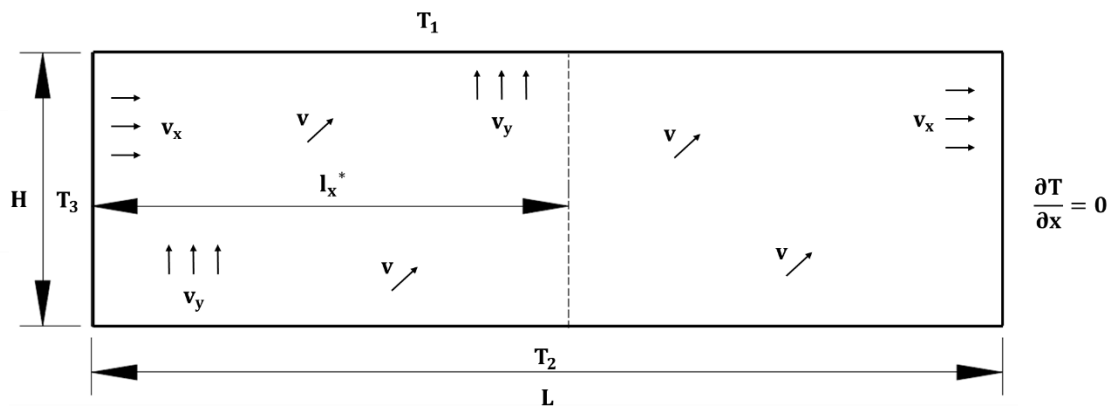
$(\cdot)'$	denota carácter adimensional
$(\cdot)^*$	denota magnitud característica

4.4.3 Modelos físico y matemático

Problema de flujo constante

La Figura (4.4.1a) representa el esquema físico del problema. El campo de flujo, con componentes horizontal y vertical de velocidad, es constante en todo el dominio. El agua entra por las fronteras izquierda e inferior y sale por las fronteras derecha y superior, condiciones similares a las reflejadas en el trabajo de Lu y Ge [1996] para el problema mecánico. En relación con las condiciones de temperatura en los contornos, se impone una condición de primera clase en las fronteras de entrada de fluido (izquierda e inferior) y en la frontera superior. La extensión horizontal del dominio es suficientemente extensa como para que la condición térmica aplicada a la derecha no influya en el campo de temperaturas en la región de estudio. Bajo estas condiciones, los perfiles verticales de temperatura evolucionan suavemente en la región de desarrollo de extensión desconocida, más allá de la cual la temperatura no depende ni de la componente horizontal del flujo oblicuo ni de la posición horizontal. Dentro de la región de desarrollo del perfil vertical de temperaturas, éste depende de las dos componentes de la velocidad y de la posición horizontal.

(a) Esquema físico del escenario de flujo oblicuo de velocidad constante



(b) Esquema físico del escenario de potenciales constantes

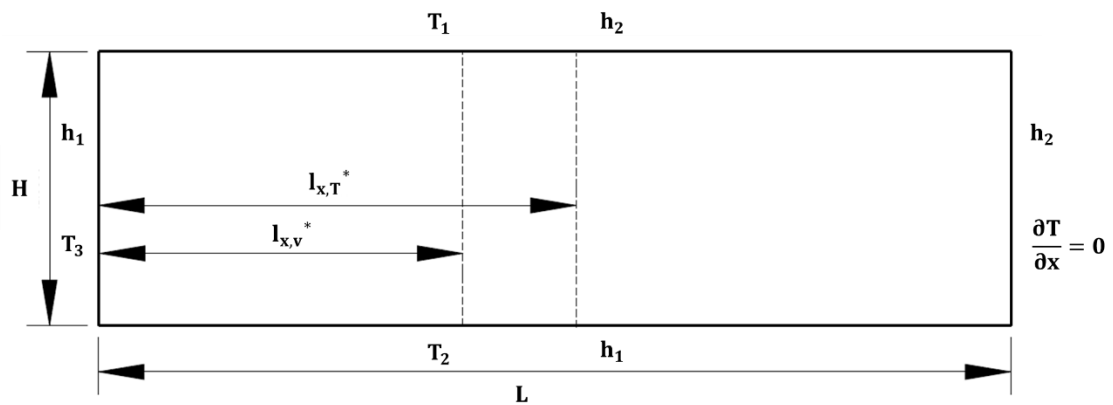


Figura 4.4.1. Esquema físico de los problemas de flujo constante (a) y potencial constante (b)

El escenario de flujo constante es esencialmente diferente al estudiado por Lu y Ge [1996]. Estos autores, para no incluir la temperatura a la entrada del fluido, necesitan imponer la condición añadida (en todo el medio poroso) de gradiente horizontal de temperaturas de valor constante para obtener perfiles de temperatura dependientes de la componente horizontal de la velocidad. Esta condición, que debería conducir a soluciones similares escaladas independientes de la extensión del dominio no es compatible con el esquema físico de la Figura (4.4.1a) cuya solución no permite el crecimiento o decrecimiento indefinido de la temperatura a lo largo del dominio.

El modelo matemático estacionario se recoge en el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$k_{m,x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{m,y} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \rho_{e,w} c_{e,w} v_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho_{e,w} c_{e,w} v_y \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (4.4.1)$$

$$T_{(x,y=0)} = T_1 \quad (4.4.2)$$

$$T_{(x=0,y)} = T_{(x,y=H)} = T_2 \quad (4.4.3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(x=L,y)} = 0 \quad (4.4.4)$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y) \quad (4.4.5)$$

La ecuación (4.4.1) es la expresión del transporte simultáneo de fluido y de calor en el medio, con términos difusivo y de arrastre (advectivo) en las dos direcciones espaciales. La difusión horizontal no se desprecia para recoger los casos de componentes horizontales de velocidad de muy pequeño valor en los que el arrastre y la difusión horizontal son comparables. Las ecuaciones (4.4.2) y (4.4.3) representan las condiciones de contorno de primera clase (temperatura constante) para la temperatura en las fronteras superior, izquierda e inferior. La ecuación (4.4.4) es una condición homogénea de segunda clase para la temperatura en la frontera derecha (el borde derecho no influye en el campo térmico desarrollado en el dominio). La extensión se asume suficientemente grande en comparación con la profundidad ($L \gg H$) con objeto de que el campo de temperaturas en la región de interés no quede afectado por la condición (4.4.4). Finalmente, la ecuación (4.4.5) es el campo de velocidades constante.

Problema de potencial constante

El esquema físico de este escenario se muestra en la Figura (4.4.1b). La imposición de potenciales hidráulicos constantes en las fronteras del dominio da lugar a un campo de velocidades que depende de las coordenadas (x, y) . La asunción de anisotropía en la conductividad hidráulica (que responde a los escenarios más reales) ejerce una influencia importante en este campo, como se verá más adelante.

En un dominio suficientemente extenso horizontalmente, el perfil vertical de velocidades, inicialmente dependiente de la posición horizontal, se desarrolla hasta hacerse independiente de esta coordenada. Así, en este escenario existe una región de entrada de extensión $l_{x,v}^*$ dentro de la cual se desarrolla el perfil mecánico de velocidades. Más allá de esta extensión, el campo de velocidades es estrictamente vertical. Lo mismo ocurre con el campo de temperaturas. Existe una región de entrada (al menos del mismo tamaño de la anterior limitada por $l_{x,v}^*$ por efecto de la velocidad horizontal), en la cual el perfil vertical de temperaturas depende de las componentes de la velocidad y , por ello, también de las coordenadas. Más allá de esta región el perfil vertical de temperaturas depende de la coordenada vertical y esta componente de la velocidad.

Las ecuaciones de gobierno del problema mecánico son:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ v_x = K_x \frac{\partial h}{\partial x}; v_y = K_y \frac{\partial h}{\partial y} \end{array} \right. \quad (4.4.6)$$

$$h_{(x=0,y)} = h_{(x,y=H)} = h_1 \quad (4.4.7)$$

$$h_{(x,y=0)} = h_{(x=L,y)} = h_2 \quad (4.4.8)$$

La ecuación (4.4.6) es una combinación de la de continuidad del fluido, $\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = 0$, y la constitutiva de Darcy en medios anisótropos, $v_x = k_x(\partial h / \partial x)$ y $v_y = k_y(\partial h / \partial y)$. Las ecuaciones (4.4.7) y (4.4.8) representan las condiciones mecánicas de primera clase en las fronteras. El modelo matemático se completa con las ecuaciones de transporte de calor y las condiciones de contorno de temperatura, ecuaciones (4.4.1) a (4.4.4) del problema anterior.

El problema mecánico, desacoplado del térmico, da lugar a un campo de velocidades y líneas de flujo (también de potenciales) que se desarrolla progresivamente hacia un perfil vertical de velocidades constantes (líneas de flujo verticales) en una región de extensión desconocida $l_{x,v}^*$. Más allá de esta región el problema es 1D, con líneas de flujo verticales ascendentes si $h_1 > h_2$. En relación con el campo de temperaturas ocurre algo similar, existe una región de desarrollo del perfil, de extensión $l_{x,T}^*$ (no necesariamente coincidente con $l_{x,v}^*$), más allá de la cual el problema es 1D y tiene solución analítica (Stallman [1963] y Bredehoeft y Papadopoulos [1965]).

4.4.4 Caracterización dimensional

En el problema desacoplado definido por un flujo constante, los grupos adimensionales se obtienen a partir de la ecuación de transporte simultáneo de calor y fluido en un medio poroso (ecuación (4.4.1)) mientras que, en el problema definido por potenciales, el patrón de velocidades es desconocido y los grupos adimensionales de los que dependen han de obtenerse de las ecuaciones del problema mecánico. Dichos grupos, más los derivados de la ecuación de transporte de calor son los que controlan la solución del campo térmico. Existen muchos casos de problemas acoplados, incluso no lineales, en los que este protocolo ha conducido a la deducción de los grupos adimensionales más precisos (Manteca y col. [2014], Manteca y col. [2012] y Alhama y col. [2014]).

Grupos adimensionales del problema de flujo constante

Las variables adimensionales se definen en la forma

$$x' = \frac{x}{l_x^*} \quad y' = \frac{y}{H} \quad T' = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \quad (4.4.9)$$

Donde l_x^* es la extensión de la región con perfil de temperaturas dependiente de x (y por tanto de la componente horizontal de la velocidad). Un criterio preciso para definir l_x^* se propone más adelante. La sustitución de estas variables adimensionales en la ecuación de transporte simultáneo de calor y fluido (4.4.1) conduce a su forma adimensional

$$k_{m,x} \frac{\partial^2 T'(T_2-T_1)}{\partial x'^2 l_x^{*2}} + k_{m,y} \frac{\partial^2 T'(T_2-T_1)}{\partial y'^2 H^2} + \rho_{e,w} c_{e,w} v_x \frac{\partial T}{\partial x' l_x^*} + \rho_{e,w} c_{e,w} v_y \frac{\partial T}{\partial y' H} = 0 \quad (4.4.10)$$

Promediando los factores derivativos a la unidad, los coeficientes de los términos de esta ecuación son

$$\frac{k_{m,x}}{l_x^{*2}} \quad ; \quad \frac{k_{m,y}}{H^2} \quad ; \quad \frac{\rho_{e,w} c_{e,w} v_x}{l_x^*} \quad ; \quad \frac{\rho_{e,w} c_{e,w} v_y}{H}$$

De ellos, se derivan tres grupos adimensionales que pueden ser escritos en la forma

$$\pi_1 = \frac{l_x^*}{H} \quad ; \quad \pi_2 = \frac{\alpha}{v_y H} \quad ; \quad \pi_3 = \frac{v_x H}{l_x^* v_y} = \frac{v_x}{v_y} \quad (4.4.11)$$

De aquí, la solución para l_x^* es

$$l_x^* = H \Psi_1 \left(\frac{\alpha}{v_y H}, \frac{v_x}{v_y} \right) \quad (4.4.12)$$

con Ψ_1 una función matemática desconocida de sus argumentos (teorema de pi). La forma adimensional del campo de temperaturas (T') depende de los monomios π_2 y π_3 , así como de las coordenadas adimensionales x' e y' . Pero como el efecto de estos monomios (π_2 y π_3) queda reflejado en la expresión de l_x^* , la solución del campo adimensional de temperaturas se puede escribir como

$$\frac{T-T_1}{T_2-T_1} = \Psi_2 \left(\frac{x}{l_x^*}, \frac{y}{H} \right) \quad (4.4.13)$$

Las soluciones (4.4.12) y (4.4.13), que serán verificadas seguidamente, constituyen ábacos universales que dan la solución de cualquier escenario concreto de flujo oblicuo, sean cuales sean los valores de los parámetros físicos y geométricos involucrados.

Una variante de este problema consiste en la asunción de una temperatura de entrada de flujo en el borde izquierdo del dominio, diferente de las temperaturas que definen las condiciones de frontera superior e inferior. Una condición que escribiremos mediante la nueva ecuación

$$T_{(x=0,y)} = T_3 \quad (4.4.14)$$

La existencia de tres temperaturas diferentes en el escenario introduce un nuevo grupo adimensional definido en función de las temperaturas T_1 , T_2 y T_3

$$\pi_4 = \frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_1} \quad (4.4.15)$$

Este grupo adimensional no afecta al valor de la longitud característica (solución (4.4.12)). Sin embargo, sí afecta a la temperatura adimensional tal como se define en la solución (4.4.13). Ahora la solución para T' es

$$T' = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \Psi_3 \left(\frac{x}{l_x^*}, \frac{y}{H}, \frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_1} \right) \quad (4.4.16)$$

Por lo tanto, la solución de T' puede tomar valores por encima de la unidad, como sucede por ejemplo en el caso de que el valor de T_3 esté por encima de los valores de T_1 y T_2 . Más tarde la temperatura adimensional será redefinida para hacerla independiente de este nuevo monomio.

Es interesante comparar los grupos adimensionales de la solución (4.4.13) con los grupos que componen la solución analítica de Lu y Ge [1996], aunque se trate de escenarios con condiciones térmicas de contorno diferentes. Estos autores, seguramente con razonamientos dimensionales más o menos elementales, consideran que tanto el monomio $\frac{v_x H}{\alpha}$ como $\frac{v_y H}{\alpha}$ son grupos adimensionales. Sin embargo, introducen un tercer grupo, independiente de los anteriores, de la forma $\frac{v_x \gamma}{v_y \lambda}$, con γ el gradiente horizontal de temperatura impuesto en el problema $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ y λ el gradiente vertical medio. Consecuentemente, de acuerdo con el teorema de pi, su solución debería depender de tres grupos, a saber $\frac{v_x H}{\alpha}$, $\frac{v_y H}{\alpha}$ y $\frac{v_x \gamma}{v_y \lambda}$, cuando en realidad los autores proponen (sin justificación científica) una solución que sólo depende de dos, $\frac{\alpha}{v_y H}$ y $\frac{v_x \gamma}{v_y \lambda}$.

Es inmediato verificar la adimensionalización de la ecuación de gobierno de Lu y Ge,

$$\frac{d^2 T}{dz^2} - \frac{\beta}{L} \frac{dT}{dz} - \frac{\alpha_{Lu\&Ge}}{L} \gamma = 0$$

Con $\alpha_{Lu\&Ge} = \frac{\rho_e w c_e w v_x L}{k_m}$ y $\beta = \frac{\rho_e w c_e w v_z L}{k_m}$ conduce a sólo dos monomios que coinciden precisamente con los anteriores $\left(\frac{\alpha}{v_y H} \text{ y } \frac{v_x \gamma}{v_y \lambda}\right)$, rechazando el grupo $\frac{\alpha}{v_x H}$ como un tercer grupo independiente del que depende la solución.

Grupos adimensionales del problema de potencial constante

Para el problema mecánico (desacoplado del térmico) se definen las siguientes variables adimensionales

$$x' = \frac{x}{l_{x,v}^*} \quad y' = \frac{y}{H} \quad h' = \frac{h-h_2}{h_1-h_2} \quad (4.4.17)$$

donde $l_{x,v}^*$ es la extensión de la región del perfil de velocidades dependiente de la posición horizontal x . Sustituyendo estas variables en la ecuación (4.4.6), se obtiene la forma adimensional de esta ecuación

$$k_x \frac{\partial^2 h'(h_1-h_2)}{\partial x'^2 l_{x,v}^{*2}} + k_y \frac{\partial^2 h'(h_1-h_2)}{\partial y'^2 H^2} = 0 \quad (4.4.18)$$

Los únicos coeficientes de esta ecuación, $\frac{k_x}{(l_{x,v}^*)^2}$ y $\frac{k_y}{H^2}$, dan lugar al grupo adimensional $\pi_1 = \frac{k_x}{k_y} \frac{H^2}{(l_{x,v}^*)^2}$, con lo que la solución para $l_{x,v}^*$ es

$$l_{x,v}^* \propto H \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \quad (4.4.19)$$

Una vez elegido un criterio para fijar $l_{x,v}^*$, esta proporcionalidad puede transformarse en una igualdad determinando la constante mediante una única simulación numérica.

En relación al problema térmico, las variables adimensionales se definen en la forma

$$x' = \frac{x}{l_{x,T}^*} \quad y' = \frac{y}{H} \quad T' = \frac{T-T_1}{T_2-T_1} \quad (4.4.20)$$

Se ha introducido una nueva longitud característica ($l_{x,T}^*$) que no coincide necesariamente con la del problema mecánico ($l_{x,v}^*$). Se puede asumir que, como mínimo, la nueva longitud característica ha de ser del mismo tamaño que la anterior ya que el campo de temperaturas no podría desarrollarse por completo mientras la velocidad del agua tenga componentes horizontal y vertical. La introducción de estas variables en la ecuación de gobierno (4.4.1) conduce a la ecuación de transporte en su forma adimensional:

$$k_{m,x} \frac{\partial^2 T'(T_2-T_1)}{\partial x'^2 l_{x,T}^{*2}} + k_{m,y} \frac{\partial^2 T'(T_2-T_1)}{\partial y'^2 H^2} + \rho_{e,w} c_{e,w} k_x \frac{\partial h'(h_1-h_2)}{\partial x' l_{x,T}^*} \frac{\partial T}{\partial x' l_{x,T}^*} + \rho_{e,w} c_{e,w} k_y \frac{\partial h'(h_1-h_2)}{\partial y' H} \frac{\partial T}{\partial y' H} = 0 \quad (4.4.21)$$

Esta ecuación contiene cuatro coeficientes

$$\frac{k_{m,x}}{(l_{x,T}^*)^2} ; \quad \frac{k_{m,y}}{H^2} ; \quad \frac{\rho_{e,w} c_{e,w} k_x (h_1-h_2)}{(l_{x,T}^*)^2} ; \quad \frac{\rho_{e,w} c_{e,w} k_y (h_1-h_2)}{H^2}$$

que dan lugar a tres grupos adimensionales que pueden ser escritos (por ejemplo) en la forma

$$\pi_{II} = \frac{l_{x,T}^*}{H} \quad ; \quad \pi_{III} = \frac{K_x}{K_y} \frac{H^2}{(l_{x,T}^*)^2} = \frac{K_x}{K_y} \quad ; \quad \pi_{IV} = \frac{\alpha}{K_y(h_2-h_1)} \quad (4.4.22)$$

Con todo, la solución para $l_{x,T}^*$ es

$$l_{x,T}^* = H \Psi_4 \left(\frac{\alpha}{K_y(h_2-h_1)}, \frac{K_x}{K_y} \right) \quad (4.4.23)$$

Puede observarse que el monomio que relaciona ambas componentes de la conductividad hidráulica $\frac{K_x}{K_y}$ determina tanto $l_{x,v}^*$ como $l_{x,T}^*$, pero estas longitudes no son necesariamente iguales (lo que confirma nuestras suposiciones) ya que existen parámetros, tales como α por ejemplo, que afectan a $l_{x,T}^*$ pero no a $l_{x,v}^*$. La temperatura adimensional también depende de los monomios derivados de la ecuación de transporte y, como ellos determinan $l_{x,T}^*$, dicha dependencia puede escribirse directamente como una función de las posiciones relativas $\frac{x}{l_{x,T}^*}$ e $\frac{y}{H}$. Así,

$$T' = \frac{T-T_1}{T_2-T_1} = \Psi_5 \left(\frac{x}{l_{x,T}^*}, \frac{y}{H} \right) \quad (4.4.24)$$

Cabe aplicar comentarios similares a los expuestos en la sección previa en relación con la existencia de una tercera temperatura (T_3) en el borde izquierdo de entrada de agua. En este caso, las dependencias anteriores (4.4.24) se modifican en la forma

$$\frac{T-T_1}{T_2-T_1} = \Psi_6 \left(\frac{x}{l_{x,T}^*}, \frac{y}{H}, \frac{T_3-T_1}{T_2-T_1} \right) \quad (4.4.25)$$

4.4.5 Verificación de las dependencias obtenidas. Curvas universales

Las expresiones (4.4.12), (4.4.13) y (4.4.16) para el problema de flujo constante y (4.4.23), (4.4.24) y (4.4.25) para el problema de potencial constante, constituyen dependencias universales que verificamos a continuación tras introducir criterios convenientes para definir las longitudes características l_x^* , $l_{x,v}^*$ y $l_{x,T}^*$. Como sabemos, la técnica para esta verificación consiste en comprobar que las soluciones de estas incógnitas no cambian (como tampoco el campo adimensional de temperaturas) siempre que los grupos adimensionales no cambien su valor numérico (modificando el valor de dos o más de los parámetros involucrados en dichos grupos). Las soluciones se obtienen mediante simulaciones numéricas precisas.

Problema de flujo constante

Definiremos l_x^* como la distancia, medida en el eje de simetría del dominio ($y = \frac{H}{2}$), a la cual la temperatura alcanza el 95% del valor $[T_{\frac{H}{2},est} - T_2]$, donde $T_{\frac{H}{2},est}$ es la temperatura en $\frac{H}{2}$ correspondiente a un perfil asociado a la velocidad $\mathbf{v} = v_y$ ($v_x = 0$). Las soluciones numéricas determinan su valor en cada problema.

Para verificar la dependencia (4.4.12) $l_x^* = H \cdot \Psi_1 \left(\frac{\alpha}{v_y H}, \frac{v_x}{v_y} \right)$, es suficiente simular los casos reflejados en la Tabla 4.4.1. El caso 1 se toma como referencia para los siguientes.

Caso	v_x (m/s)	v_y (m/s)	α (m ² /s)	H (m)	T_1 (°C)	T_2 (°C)	T_3 (°C)	l_x^* (m)
1	$4 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$0.4 \cdot 10^{-6}$	1	1	2	2	2.408
2	$12 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	1	1	2	2	2.408
3	$12 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$2.4 \cdot 10^{-6}$	2	1	2	2	4.816
4	$4 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$0.4 \cdot 10^{-6}$	1	1	5	5	2.409
5	$4 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$0.4 \cdot 10^{-6}$	1	1	2	3	2.409
6	$4 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$0.4 \cdot 10^{-6}$	1	2	4	6	2.409
7	$4 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$0.4 \cdot 10^{-6}$	1	1	2	1.5	2.407

Tabla 4.4.1. Valores de los parámetros, grupos adimensionales y longitudes características de los casos de flujo constante

Como los grupos adimensionales son los mismos en los casos 1, 2 y 3, el cociente $\frac{l_x^*}{H}$ permanece inalterable en los tres primeros casos; así, los casos 1 y 2 tienen la misma l_x^* mientras que el caso 3 tiene longitud característica doble.

Los casos 4, 5, 6 y 7 verifican que las temperaturas del contorno no influyen en la expresión de l_x^* .

La Figura 4.4.2 muestra en forma de ábaco universal la dependencia $l_x^* = H \Psi_1 \left(\frac{\alpha}{v_y H}, \frac{v_x}{v_y} \right)$.

En cuanto a la dependencia (4.4.13), $\frac{T-T_1}{T_2-T_1} = \Psi_2 \left(\frac{x}{l_x^*}, \frac{y}{H} \right)$, la Figura 4.4.3 muestra la superficie o sábana universal válida para todos los casos en los que $T_2 = T_3$. Un detalle de los perfiles de temperatura se recoge en las Figuras 4.4.4 y 4.4.5. La primera representa el perfil horizontal de la línea $y = H/2$, línea sobre la que se ha leído el valor de la longitud característica. La segunda

figura muestra el perfil de temperaturas verticales en las posiciones horizontales adimensionales

$\frac{x}{l_x^*} = 0.2, 0.5$ y 1 .

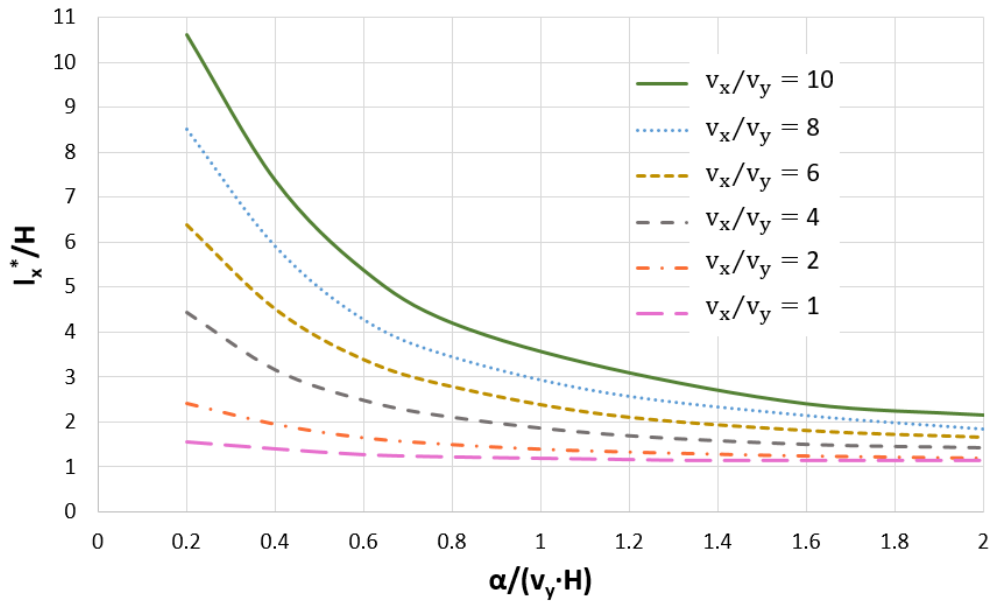


Figura 4.4.2. Ábaco Universal $l_x^* = H \cdot \Psi_1\left(\frac{\alpha}{v_y H}, \frac{v_x}{v_y}\right)$

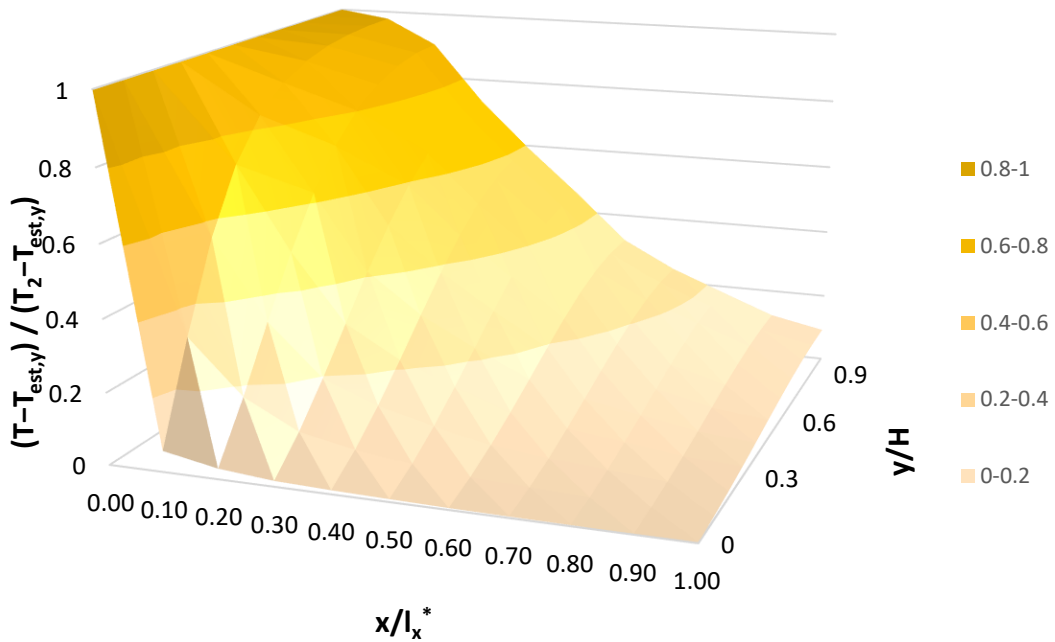


Figura 4.4.3. Superficie universal $\frac{T - T_{est,y}}{T_2 - T_{est,y}} = \Psi_2\left(\frac{x}{l_x^*}, \frac{y}{H}\right)$

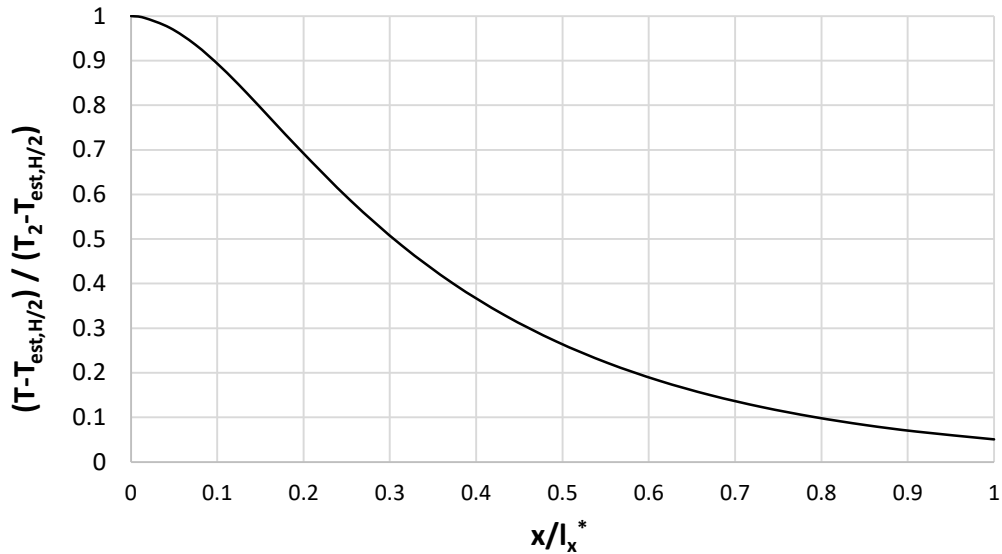


Figura 4.4.4. Perfil universal horizontal de la temperatura adimensional, $\frac{T - T_{est,y}}{T_3 - T_{est,y}}$, en la línea $y = H/2$

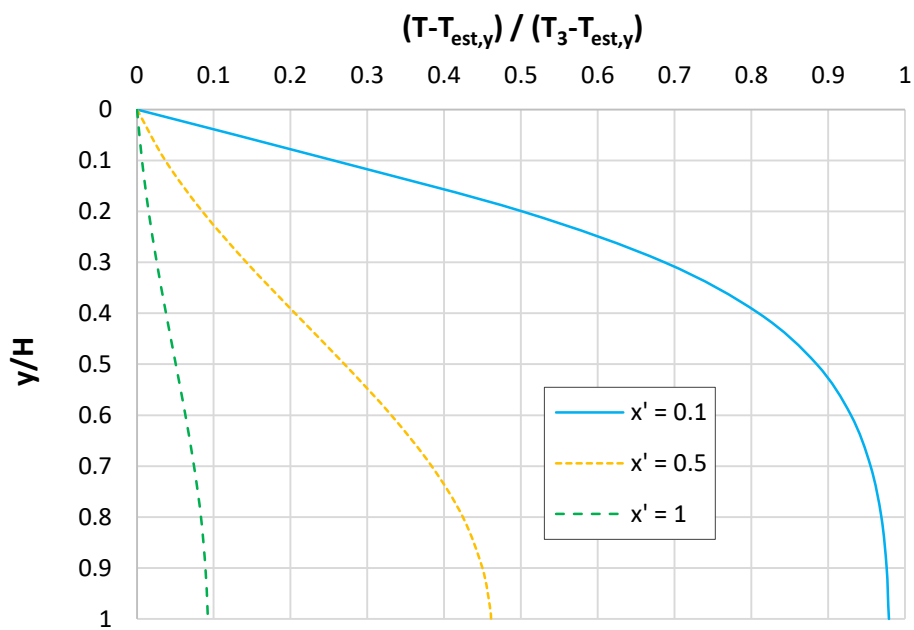


Figura 4.4.5. Perfiles verticales universales de la temperatura adimensional, $\frac{T - T_{est,y}}{T_3 - T_{est,y}}$, correspondientes a las posiciones relativas horizontales $\frac{x}{l_x} = 0.2, 0.5$ y 1

Problema de potencial constante

La longitud característica mecánica ($l_{x,v}^*$) es una expresión exacta, salvo la constante de proporcionalidad. Definiremos $l_{x,v}^*$ como la longitud, medida sobre la línea $y = H/2$, a la cual la componente horizontal de la velocidad del agua es despreciable en comparación con la componente vertical, por ejemplo, $v_x = 0.05v_y$. Más allá de $l_{x,v}^*$ el problema es 1D, con flujo vertical, y con solución analítica.

Capítulo 4. Caracterización de los escenarios. Grupos adimensionales y curvas universales

La expresión (4.4.19) obtenida mediante la técnica de adimensionalización discriminada de la ecuación de continuidad del flujo conecta el supuesto cociente adimensional entre conductividades hidráulicas en cada dirección, $\frac{K_x}{K_y}$, con el también supuesto cociente adimensional $\frac{l_{x,v}^*}{H}$. El coeficiente de proporcionalidad se obtiene tras la simulación numérica del caso 8 de la Tabla 4.4.2.

Caso	K_x (m/s)	K_y (m/s)	Δh (m)	H (m)	α (m ² /s)	T_1 (°C)	T_2 (°C)	T_3 (°C)	$l_{x,v}^*$ (m)	$l_{x,T}^*$ (m)
8	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	0.1	10	$2 \cdot 10^{-6}$	1	2	2	31.75	11.75
9	$10 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	0.05	10	$2 \cdot 10^{-6}$	1	2	2	31.75	11.75
10	$20 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	0.1	5	$2 \cdot 10^{-6}$	1	2	2	31.75	7.25
11	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	0.2	10	$4 \cdot 10^{-6}$	1	2	2	31.75	11.75
12	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	0.1	10	$2 \cdot 10^{-6}$	1	2	3	31.75	11.75
13	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	0.1	10	$2 \cdot 10^{-6}$	2	4	6	31.75	11.75
14	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	0.1	10	$2 \cdot 10^{-6}$	1	2	1.5	31.75	11.25

Tabla 4.4.2. Valores de los parámetros geométricos, hidráulicos y térmicos y longitudes características de los casos de potencial hidráulico constante

La Figura 4.4.6 muestra el cociente v_x/v_y en función de la posición horizontal, en la línea $y = H/2$. De acuerdo con el criterio adoptado, $l_{x,v}^* = 31.75$ m, lo que resulta en una constante de proporcionalidad de valor 1.42. Con esto, se reduce a la igualdad

$$l_{x,v}^* = 1.42 H \sqrt{\frac{K_x}{K_y}} \quad (4.4.26)$$

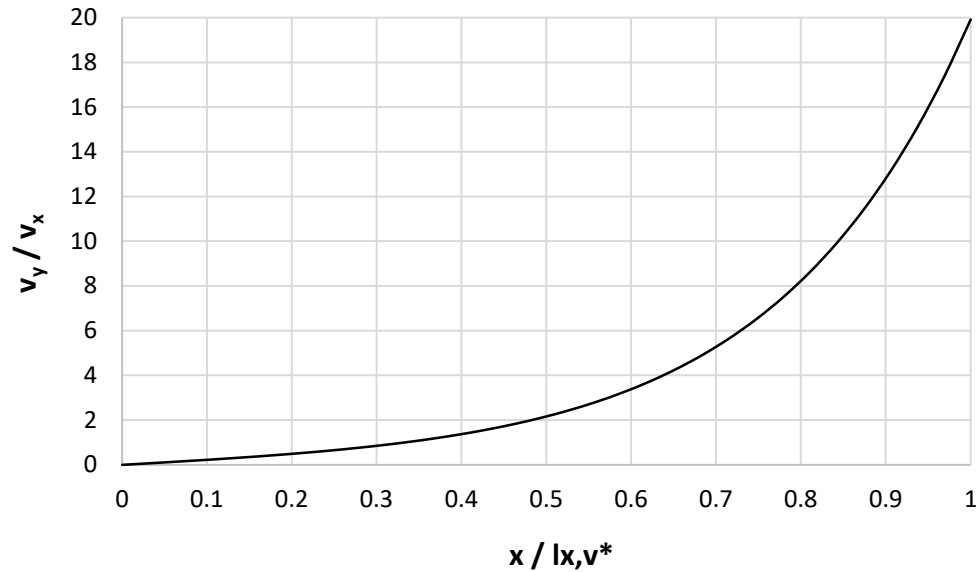


Figura 4.4.6. v_y/v_x frente a $x/l_{x,v}^*$ en la línea $y = H/2$. Caso 8 de la Tabla 4.4.2

La verificación de las dependencias (4.4.19), (4.4.23) y (4.4.24) se lleva a cabo con los casos 8 a 11. El caso 9 comparado con el 8 duplica los valores de K_x y K_y y reduce a la mitad $\Delta h = h_2 - h_1$, lo cual mantiene el mismo valor de $l_{x,v}^*$ y $l_{x,T}^*$, un resultado que confirman las simulaciones numéricas. En el caso 10, K_x es cuatro veces la del caso 8 y la profundidad H es la mitad, con lo que $l_{x,v}^*$ no cambia; sin embargo, $l_{x,T}^*$ se altera ligeramente debido al cambio en el cociente K_x/K_y contenido en el argumento de la función desconocida. Un resultado igualmente confirmado por las simulaciones. En el caso 11 los valores de α y Δh se duplican en comparación con los del caso 8. Ello no cambia el valor de los argumentos de las funciones (4.4.18) y (4.4.23) por lo que las longitudes características $l_{x,v}^*$ y $l_{x,T}^*$ retienen el mismo valor como así es confirmado en las simulaciones numéricas. Finalmente, en los casos 12, 13 y 14 se aprecia cómo las longitudes características $l_{x,v}^*$ y $l_{x,T}^*$ son idénticas a las del caso 8 a pesar de que han cambiado las condiciones térmicas en las fronteras del dominio.

Las Figuras 4.4.7 y 4.4.8 muestran los ábacos universales las dependencias, (4.4.23) y (4.4.24), cuyo uso, junto con la expresión (4.4.19) permite obtener las soluciones de $l_{x,v}^*$, $l_{x,T}^*$ y el campo adimensional de temperaturas de cualquier escenario, a partir de los datos k_x , k_y , α , H , $h_2 - h_1$, T_1 y T_2 . Para ello, utilice la expresión (4.4.19) para obtener $l_{x,v}^*$ y entre en los ábacos para obtener $l_{x,T}^*$ y el campo de temperaturas adimensional.

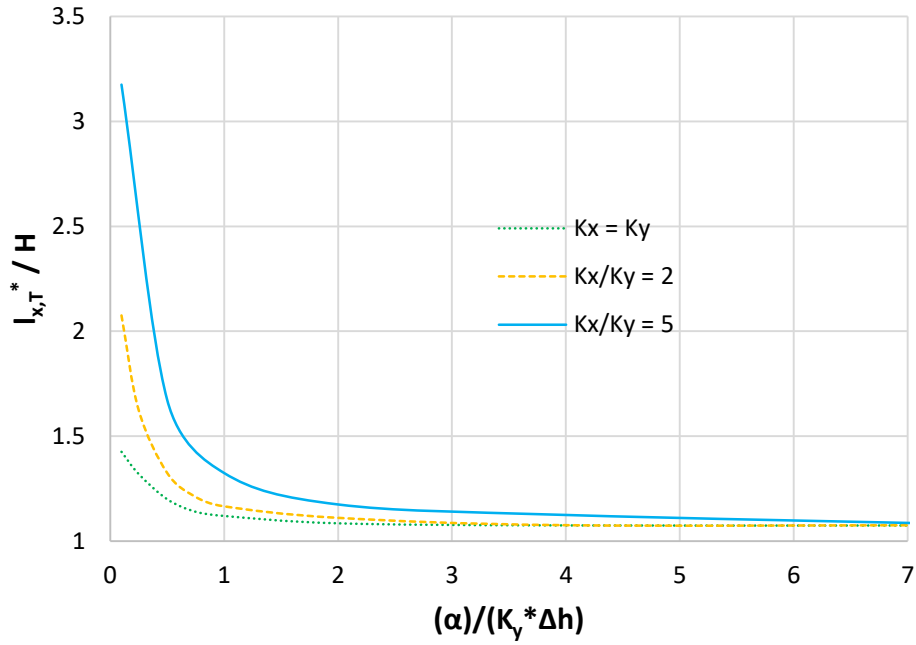


Figura 4.4.7. Ábaco de la dependencia $l_{x,T}^* = H \Psi_3 \left(\frac{\alpha}{K_y(h_2-h_1)}, \frac{K_x}{K_y} \right)$

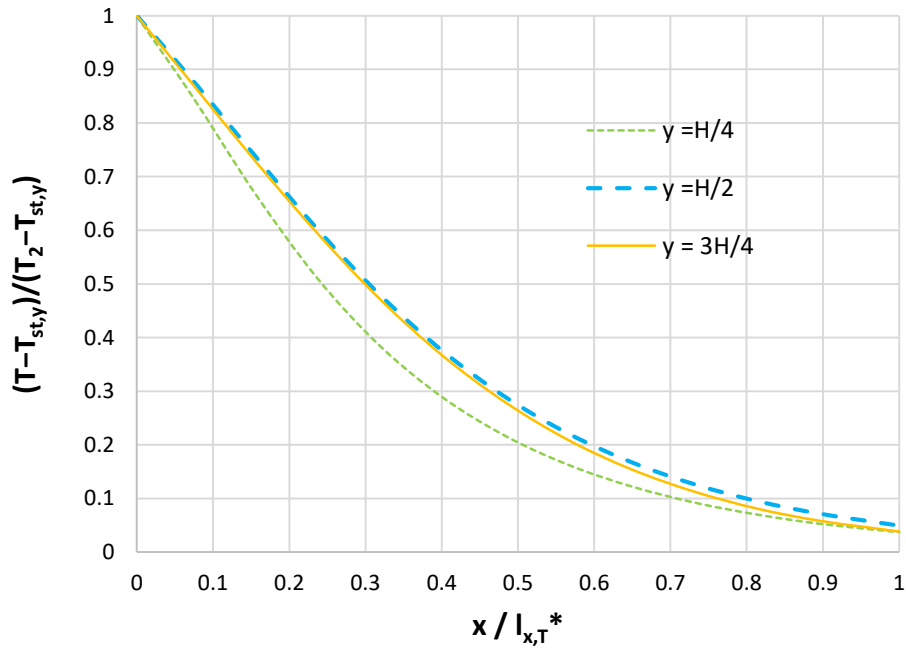


Figura 4.4.8. Ábaco de la dependencia $\frac{T - T_{st,y}}{T_3 - T_{st,y}} = \Psi_4 \left(\frac{x}{l_{x,T}^*}, \frac{y}{H} \right)$

Finalmente, la Figura 4.4.9 muestra el campo adimensional de temperaturas dentro la región delimitada por la longitud característica $l_{x,T}^*$ como una superficie universal.

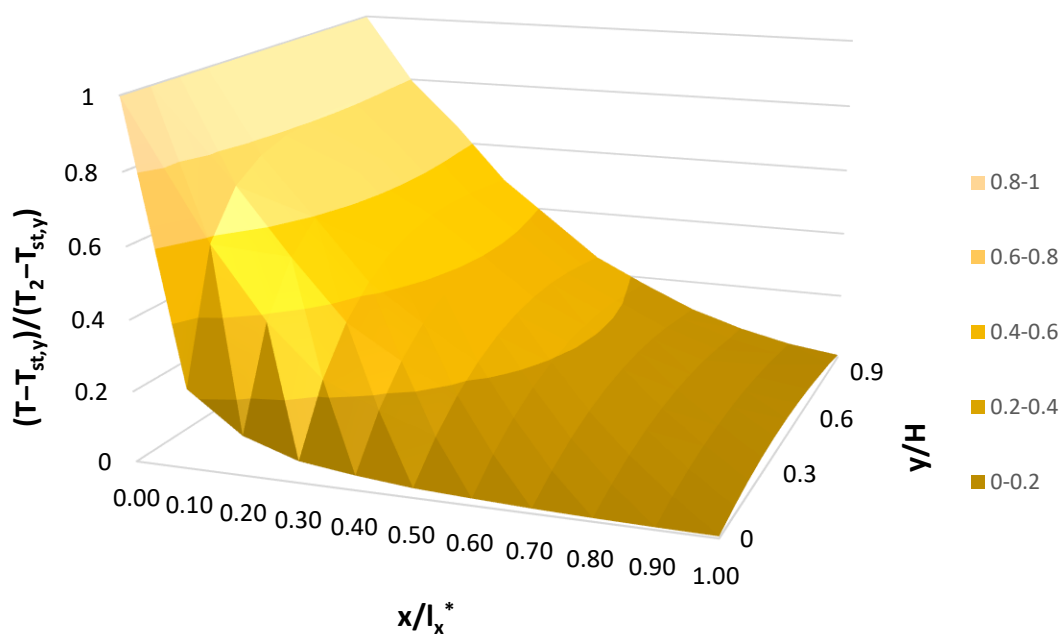


Figura 4.4.9. Superficie universal de la dependencia $\frac{T - T_{st,y}}{T_2 - T_{st,y}} = \Psi_4 \left(\frac{x}{l_{x,T}}, \frac{y}{H} \right)$

4.4.6 Conclusiones

En la presente aplicación, se estudian dos escenarios en los cuales la velocidad del flujo es oblicua, presentando componentes vertical y horizontal. En el primer caso, la velocidad del flujo es de valor constante y la temperatura presenta un valor constante en la superficie del terreno y en las fronteras de entrada del fluido. La extensión del dominio de medio poroso es lo suficientemente larga como para que la condición de contorno de temperaturas en el borde derecho no influya en los patrones térmicos dentro de la región característica de desarrollo de perfiles térmicos. En esta región característica, los perfiles de temperatura dependen de las componentes vertical y horizontal de la velocidad del flujo. Más allá de esta región, los perfiles verticales de temperatura sólo dependerán de la componente vertical de temperatura y será independiente de la posición horizontal.

En este estudio, se determinan los grupos adimensionales de los que depende el valor de la longitud que delimita la región de desarrollo de las temperaturas. Tras verificar las dependencias por medio de simulaciones numéricas, se han representado gráficamente curvas universales que podrán ser utilizadas en protocolos de problema inverso para la estimación de las componentes de la velocidad oblicua del fluido.

En el segundo escenario estudiado, se imponen en las fronteras que delimitan el dominio condiciones de potencial hidráulico constante y, además, el medio poroso presenta anisotropía

en su permeabilidad hidráulica. Se mantienen las mismas condiciones térmicas de contorno del caso anterior. Debido a que el flujo se genera por las condiciones hidráulicas de contorno, la velocidad de flujo no es constante en cada punto del medio poroso y se va desarrollando gradualmente dentro de una región más allá de la cual, el flujo horizontal se hace nulo. En primer lugar, se determinó la extensión de los perfiles de potencial hidráulico y su dependencia en los parámetros mecánicos del problema para, posteriormente, determinar los grupos adimensionales de los que depende el campo de temperaturas. Dichas dependencias son verificadas por medio de simulaciones numéricas.

4.5 Quinta aplicación. Interacción río-acuífero

4.5.1 Antecedentes

La recarga-descarga entre ríos y acuíferos es un tema de gran interés en hidrogeología en tanto que repercute en la conservación, aprovechamiento y gestión de los recursos hídricos de aguas subterráneas que se destinan al abastecimiento de poblaciones y a explotaciones agrícolas. La cuantificación de los caudales de recarga hacia el acuífero o de descarga de éste hacia el río no es un tema fácil y hasta donde conocemos no ha sido abordado desde el punto de vista cualitativo ni cuantitativo de forma precisa, así como tampoco se ha caracterizado dimensionalmente. Una de las herramientas más recientes para estudiar esta interacción sigue el protocolo de un problema inverso típico en el que los datos de entrada son los perfiles de temperatura en el acuífero que resultan del acoplamiento del problema de flujo de agua con el de transporte de calor causado por las condiciones de temperatura impuestas en los límites del acuífero. Escenarios de flujo y transporte de calor, sólo con flujo vertical u horizontal, han sido estudiados en la literatura y se dispone de soluciones analíticas para los perfiles de temperatura en ambos casos incluso para condiciones armónicas de temperatura en la superficie del terreno (Suzuki [1960], Bredehoeft y Papadopoulos [1965], Stallman [1965], Ziagos y Blackwell [1986], Lapham [1989]). También se han estudiado escenarios con flujos oblicuos aportando también soluciones analíticas, si bien, bajo hipótesis tan poco realistas como la de imponer un gradiente térmico constante horizontal en el dominio (Lu y Ge [1996]). Sin embargo, la mayor parte de los trabajos se han centrado en aspectos cualitativos más que cuantitativos, como por ejemplo el trabajo de Silliman y Booth [1993] en el cual se utilizan medidas de temperatura en el fondo del río como herramienta para la detección cualitativa de flujos verticales procedentes de pequeños ríos.

La interacción termo-mecánica río-acuífero es un problema bidimensional de mayor complejidad debido a que el flujo de agua, resultado de los potenciales hidráulicos impuestos

en los contornos, de la conductividad hidráulica del terreno e independiente del problema térmico, no es constata en cada punto. Entre los autores que estudian este problema en escenarios concretos se puede destacar, por un lado, la publicación de Duque y col. [2010] en la que se resuelve numéricamente a partir de perfiles verticales de temperatura la interacción río-acuífero entre el río Guadalfeo y el acuífero de Motril-Salobreña en un escenario simétrico sometido a la variación estacional de la temperatura en la superficie del terreno. Por otro parte, Kulongoski e Izbicki [2008] utilizaron el software VS2DHI para comparar resultados de simulaciones con datos experimentales obtenidos en campo y así caracterizar las propiedades físicas de los sedimentos y los puntos en los cuales implementar recargas artificiales de agua subterránea. Consideraron un modelo bidimensional con suelo no saturado axi-simétrico normal a la dirección del flujo del agua del río.

En suelos consolidados, en mayor o menor grado, la anisotropía de la conductividad hidráulica puede llegar a ser importante, con valores de la relación “permeabilidad horizontal/vertical” superiores a 10 (Childs y col. [1957] y Chapuis y Gill [1989]). En consecuencia, el campo de velocidades (desacoplado del problema térmico) y el campo de temperatura (acoplado al anterior) dependen fuertemente de este cociente entre conductividades hidráulicas.

El presente trabajo profundiza en la caracterización dimensional de un escenario 2D que podríamos catalogar como patrón, en el que un río superficial recarga a un acuífero de conductividad hidráulica anisótropa. El patrón de líneas de flujo y potenciales hidráulicos (líneas equipotenciales) solo depende de las condiciones de potencial y flujo en los contornos, sin embargo, determina, junto con las condiciones térmicas del contorno, el campo de temperaturas en el dominio. La caracterización dimensional consiste en la búsqueda de los grupos adimensionales que rigen las soluciones tanto del problema mecánico (desacoplado) como del térmico acoplado al anterior. Para ello se sigue el proceso de la adimensionalización discriminada y normalizada de las ecuaciones de gobierno que integran el modelo matemático. Con él, primero se definen las variables dependientes e independientes de forma normalizada, con la introducción de referencias justificadas por razonamientos físicos. A continuación, se sustituyen dichas variables en la ecuación de gobierno reduciendo ésta a su forma adimensional. Finalmente, como ya hemos expuesto en los casos anteriores, aproximando los factores derivativos a la unidad, los grupos adimensionales son los cocientes independientes que se forman entre cada par de sumandos de la ecuación.

4.5.2 Nomenclatura específica

h_1 potencial hidráulico en el borde derecho del dominio (m)

h_2	potencial hidráulico en el río (m)
L	longitud del dominio (m)
l_r	ancho del río (m)
$l_{x,T}^*$	longitud característica térmica (m)
$l_{x,v}^*$	longitud característica mecánica (m)
T_1	temperatura en la superficie del terreno (°C)
T_2	temperatura al fondo del dominio (°C)
v	velocidad del agua subterránea (m/s)
α_c	difusividad térmica corregida $\frac{k_m}{\rho_{e,w} c_{e,w}}$ (m ² /s)
'	denota carácter adimensional
[]	denota intervalo

Subíndices

$(\cdot)_{1,2,3\dots}$	denota diferentes grupos adimensionales o diferentes funciones matemáticas
$(\cdot)_{l_{x,v}^*}$	hace referencia a la longitud característica del problema mecánico

4.5.3 Modelos físico y matemático

El esquema físico del escenario del problema se muestra en la Figura 4.5.1 en el cual aparecen reflejadas las condiciones térmicas e hidráulicas de contorno. Se asume un escenario de gran extensión horizontal, suficiente como para que se desarrollen perfiles verticales de temperatura estacionarios en una región de entrada de extensión desconocida, y un medio poroso de conductividad hidráulica anisótropa. Se considera un acuífero saturado, impermeable en su fondo, con nivel freático situado en la superficie del terreno. La frontera derecha es la región de salida del flujo mientras que la izquierda por simetría del dominio se considera impermeable. El flujo de agua subterránea viene impuesto por los potenciales en la superficie del río (h_1) y el potencial en la frontera derecha del dominio (h_2). En relación con las condiciones de térmicas contorno, se imponen temperaturas T_1 en la superficie del terreno y en el río y T_2 en el fondo del dominio, condición adiabática (flujo nulo) en la frontera de simetría (borde izquierdo) y condición de primera clase con pendiente vertical de temperaturas $(T_2 - T_1)/H$. Por último, la extensión horizontal del dominio es suficientemente extensa como para que la condición térmica aplicada a la derecha no influya en el campo de temperaturas en la región de estudio.

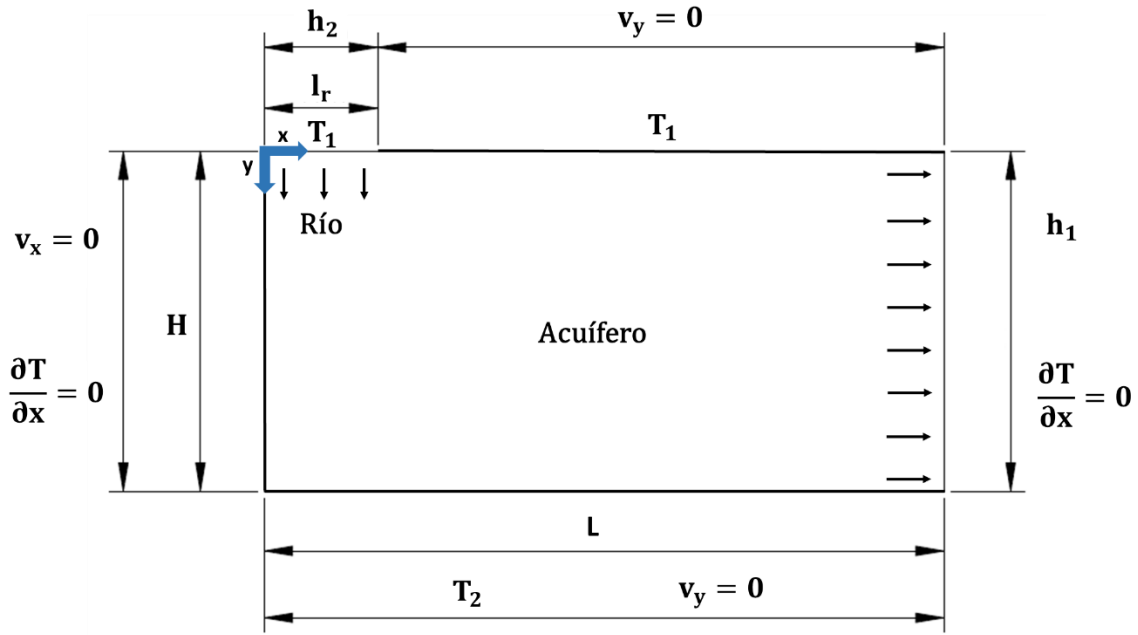


Figura 4.5.1. Esquema físico del problema

El problema mecánico, desacoplado del problema térmico, queda caracterizado por el campo de potenciales $h(x,y)$, resultante de las condiciones de contorno mecánicas y de la conductividad hidráulica del medio poroso. Las líneas de flujo descienden desde la superficie del río y se curvan paulatinamente hasta hacerse prácticamente horizontales y equidistantes (flujo constate) más allá de una cierta extensión que llamaremos $l_{x,v}^*$, definiendo así una región de desarrollo del flujo que dependerá de la geometría y de la conductividad hidráulica. El valor de $l_{x,v}^*$ puede definirse con un criterio ajustado, por ejemplo la longitud medida en la horizontal $y = H/2$ en la que el cociente entre las componentes vertical y horizontal de la velocidad $v_y/v_x < 0.01$. En cuanto al campo de temperaturas $T(x,y)$, la región de desarrollo del perfil fijo (independiente de x) alcanzará como mínimo la extensión $l_{x,v}^*$ en la cual la velocidad queda definida por sus componentes v_x y v_y . Llamaremos $l_{x,T}^*$ a la extensión en la que se desarrolla el perfil ($l_{x,T}^* > l_{x,v}^*$, obviamente). Véase Figura 4.5.1.

El modelo matemático estacionario se recoge en el siguiente conjunto de ecuaciones:

Problema mecánico:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ v_x = K_x \frac{\partial h}{\partial x} ; v_y = K_y \frac{\partial h}{\partial y} \end{array} \right. \quad (4.5.1)$$

$$h_{(0 < x < l_r, y=0)} = h_2 \quad (4.5.2)$$

$$h_{(L,y)} = h_1 \quad (4.5.3)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{(l_r \leq x \leq L, 0)} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(0, y)} = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(x, H)} = 0 \quad (4.5.4)$$

Problema térmico:

$$k_{m,x} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{m,y} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \rho_{e,w} c_{e,w} v_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho_{e,w} c_{e,w} v_y \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (4.5.5)$$

$$T_{(x,y=0)} = T_1 \quad (4.5.6)$$

$$T_{(x,y=H)} = T_2 \quad (4.5.7)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(x=0,y)} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(x=L,y)} = 0 \quad (4.5.8)$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y) \quad (4.5.9)$$

La ecuación (4.5.1) es el resultado de combinar la ecuación de continuidad del fluido (que se considera incompresible), $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$, con la ecuación de Darcy, de componentes $v_x = K_x \frac{\partial h}{\partial x}$; $v_y = K_y \frac{\partial h}{\partial y}$. Las ecuaciones (4.5.2) y (4.5.3) representan las condiciones mecánicas de primera clase en el río y en el borde derecho del acuífero. Las fronteras superior (al lado derecho del río), izquierda e inferior son impermeables (ecuación (4.5.4)). En cuanto a la ecuación del transporte simultáneo de calor y fluido (4.5.5), incluye tanto la difusividad vertical como la horizontal. Por último, la condición inicial de temperaturas en el medio corresponde a la solución del problema térmico en ausencia de flujo de agua. Las ecuaciones (4.5.6) y (4.5.7) representan las condiciones de contorno de primera clase (temperatura constante) para la temperatura en las fronteras superior e inferior. La ecuación (4.5.8) corresponde a una condición homogénea de segunda clase para la temperatura en la frontera derecha (el borde derecho no influye en el campo térmico desarrollado en el dominio). Finalmente, la ecuación (4.5.9) es la relativa al campo de velocidades.

En principio se ha impuesto la misma temperatura en toda la longitud de la frontera superior del dominio, si bien se distingue más adelante el caso en que la temperatura del río es diferente a la temperatura del terreno en la superficie.

4.5.4 Grupos adimensionales del problema

Para la obtención de los grupos adimensionales que rigen las soluciones del problema, se seguirá la técnica de adimensionalización discriminada y normalizada de las ecuaciones del modelo matemático.

El problema mecánico

Las variables adimensionales x' , y' y h' se definen en la forma

$$x' = \frac{x}{L} \quad y' = \frac{y}{H} \quad h' = \frac{h-h_1}{h_2-h_1} \quad (4.5.10)$$

Sustituyendo estas variables en la ecuación (4.5.1) se deduce la ecuación de gobierno adimensional

$$K_x \frac{\partial^2 h'(h_2-h_1)}{\partial x'^2 * L^2} + K_y \frac{\partial^2 h'(h_2-h_1)}{\partial y'^2 * H^2} = 0 \quad (4.5.11)$$

Promediando o aproximando los factores derivativos dentro de esta región a la unidad, merced al valor normalizado de las variables dependientes e independientes, los coeficientes resultantes de los sumandos de la ecuación anterior son $\frac{K_x}{L}$ y $\frac{K_y}{H^2}$. De ellos se deduce un único grupo adimensional

$$\pi_1 = \frac{K_x H^2}{L^2 K_y} \quad (4.5.12)$$

A este grupo hay que añadir el grupo discriminado asociado a la geometría, generalmente llamado factor de forma o relación de aspecto, que define la extensión del río en relación con la de todo el dominio

$$\pi_2 = \frac{l_r}{L} \quad (4.5.13)$$

Así, π_1 y π_2 son grupos adimensionales que controlan forzosamente toda las incógnitas del problema: patrones de líneas iso-potenciales (hidráulicos) adimensionales y patrones de iso-líneas de corriente adimensionales.

También, el caudal en su forma adimensional $\frac{Q}{(h_2-h_1)\sqrt{K_x K_y}}$, es función de los mismos monomios

$$\frac{Q}{(h_2-h_1)\sqrt{K_x K_y}} = \Psi_1 \left(\frac{K_x H^2}{L^2 K_y}, \frac{l_r}{L} \right) \quad (4.5.14)$$

El campo de potenciales adimensionales, además de depender de estos monomios, depende de las posiciones relativas x/L e y/H .

$$\frac{h-h_1}{h_2-h_1} = \Psi_2 \left(\frac{K_x H^2}{L^2 K_y}, \frac{l_r}{L}, \frac{x}{L}, \frac{y}{H} \right) \quad (4.5.15)$$

Para obtener la solución relativa a la longitud característica horizontal mecánica, se suma a los grupos adimensionales obtenidos, el monomio de la longitud característica mecánica adimensional $\pi_{1_{x,v}} = \frac{l_{x,v}}{l_r}$. Por lo tanto,

$$l_{x,v}^* = l_r^* \Psi_3 \left(\frac{K_x H^2}{L^2 K_y}, \frac{l_r}{L} \right) \quad (4.5.16)$$

Conviene apuntar que la discriminación, ya aplicada en la propia definición de las variables adimensionales (4.5.10), conduce a una solución más precisa que la habitual, deducida a partir de consideraciones adimensionales clásicas en las que el grupo $\frac{K_x H^2}{L^2 K_y}$ queda separado en dos monomios $\frac{K_x}{K_y}$ y $\frac{H}{L}$ que, como verificamos más adelante, no son grupos adimensionales independientes.

En cuanto a los valores numéricos de los grupos π_1 y π_2 cabe hacer el siguiente comentario: el grupo $\frac{l_r}{L}$ tiene un valor pequeño en general y carece de significado físico en cuanto a balance de magnitudes ya que procede de la geometría del dominio mientras que $\frac{K_x H^2}{L^2 K_y}$ es el balance entre los cambios de velocidad entre las direcciones x e y. Valores de este grupo de órdenes de magnitud superiores a la unidad ($K_x \gg K_y$ o $H \gg L$, o ambas) confinarían el flujo en una región muy cercana a la superficie con un patrón en dicha región independiente de H, mientras que valores del grupo inferiores a la unidad distribuirían el flujo en todo el dominio, creando patrones claramente dependientes de H. Dado que la condición de contorno de potencial hidráulico constante a la derecha del dominio implica una componente vertical de la velocidad nula en dicho borde, dominios muy extensos darían lugar a regiones también extensas cerca del borde derecho en las que la componente vertical de la velocidad sería casi nula, es decir, el patrón de flujo con componente apreciable de velocidad vertical quedaría reducido a una extensión que podríamos definir mediante una longitud característica $l_{x,v}^*$ de acuerdo con un determinado criterio. Dentro de dicha región, el potencial hidráulico adimensional dependería solamente de las posiciones relativas $\frac{x}{l_{x,v}^*}$ e $\frac{y}{H}$, por lo que sería una superficie universal cuya dependencia con π_1 y π_2 estaría contenida en $l_{x,v}^*$.

Para verificar la solución (4.5.14) recurriremos a la solución numérica del conjunto de casos mostrado en la Tabla 4.5.1.

Caso	k_x (m/s)	k_y (m/s)	H (m)	L_r (m)	L (m)	$h_2 - h_1$ (m)	Q (m ³ /s)
1	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	10	10	100	0.1	$479.9 \cdot 10^{-9}$
2	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$	10	10	100	0.05	$479.9 \cdot 10^{-9}$
3	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$	20	20	200	0.1	$959.8 \cdot 10^{-9}$
4	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	20	20	200	0.2	$959.8 \cdot 10^{-9}$

Tabla 4.5.1. Verificación de las expresiones (4.5.14)

Los cuatro casos simulados presentan el mismo valor para los grupos adimensionales π_1 y π_2 ($\frac{k_x H^2}{L^2 k_y} = 0.05$ y $\frac{l_r}{L} = 0.1$). Por lo tanto, la función $\Psi_1 \left(\frac{k_x H^2}{L^2 k_y}, \frac{l_r}{L} \right)$ es idéntica para los cuatro casos. Debido a que el producto $(h_2 - h_1) \sqrt{k_x k_y}$ presenta el mismo valor para los Casos 1 y 2, y para los Casos 3 y 4 (el doble que para los casos 1 y 2), el caudal circulante a través del acuífero es el mismo para los dos primeros casos y el doble para los Casos 3 y 4.

El problema térmico

Introduciendo las variables adimensionales ya definidas $x' = \frac{x}{L}$ y la posición vertical adimensional $y' = \frac{y}{H}$ más la nueva temperatura adimensional

$$T' = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \quad (4.5.17)$$

en la ecuación de gobierno (4.5.5) y promediando, se obtienen los coeficientes $\frac{k_x}{L^2}$, $\frac{k_y}{H^2}$, $\frac{\rho_{e,w} c_{e,w} k_x (h_2 - h_1)}{L^2}$ y $\frac{\rho_{e,w} c_{e,w} k_y (h_2 - h_1)}{H^2}$. Los cocientes independientes de estos dan lugar, en su forma más simple, a los grupos adimensionales

$$\pi_3 = \frac{L}{H} \quad ; \quad \pi_4 = \frac{k_x}{k_y} \quad ; \quad \pi_5 = \frac{\alpha_c}{k_y (h_2 - h_1)} \quad (4.5.18)$$

Estos, junto con el factor de forma $\pi_2 = \frac{l_r}{L}$ (proveniente del problema mecánico, ya que π_1 es dependiente de los anteriores), son los que rigen la solución del problema térmico. Así, las isolíneas de temperatura adimensional dependen de estos cuatro grupos, mientras que los valores locales de la temperatura son función además de las posiciones relativas x/L e y/H .

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \Psi_4 \left(\frac{k_x}{k_y}, \frac{\alpha_c}{k_y (h_2 - h_1)}, \frac{L}{H}, \frac{l_r}{L}, \frac{x}{L}, \frac{y}{H} \right) \quad (4.5.19)$$

La separación del grupo $\frac{k_x H^2}{L^2 k_y}$ en dos grupos independientes está causada por la isotropía de la conductividad térmica y ello hace que el problema térmico dependa de un número elevado de

monomios que lo hace difícilmente manipulable a la hora de caracterizarlo mediante ábacos universales. Es también, la mencionada isotropía en la conductividad térmica, la que no permite mejorar las soluciones que podrían obtenerse por aplicación del Análisis Dimensional Clásico. Dado que los monomios están formados por cocientes de parámetros físicos o geométricos, no es necesario la verificación de estos resultados.

4.5.5 Soluciones universales

La Figura 4.5.2 muestra el patrón de flujo y potencial del Caso 5 cuyos datos se muestran en la Tabla 4.5.2.

Caso	$h_2 - h_1$ (m)	k_x (m/s)	k_y (m/s)	H (m)	L (m)	I_r (m)	$\frac{k_x H^2}{L^2 k_y}$	$\frac{I_r}{L}$
5	1.00	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$	10.00	100.00	10.00	0.10	0.10
6	1.00	$2 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-5}$	40.00	200.00	20.00	0.10	0.10
7	1.00	10^{-4}	10^{-5}	10.00	100.00	10.00	0.10	0.10
8	1.00	10^{-4}	10^{-5}	22.36	100.00	10.00	0.50	0.10
9	1.00	10^{-4}	10^{-5}	15.82	50.00	5.00	1.00	0.10
10	1.00	10^{-4}	10^{-5}	35.35	50.00	5.00	5.00	0.10
11	1.00	10^{-4}	10^{-5}	25.00	25.00	2.50	10.00	0.10

Tabla 4.5.2. Valores de los parámetros físicos y geométricos de diferentes escenarios (se incluye el valor de los monomios en la tabla)

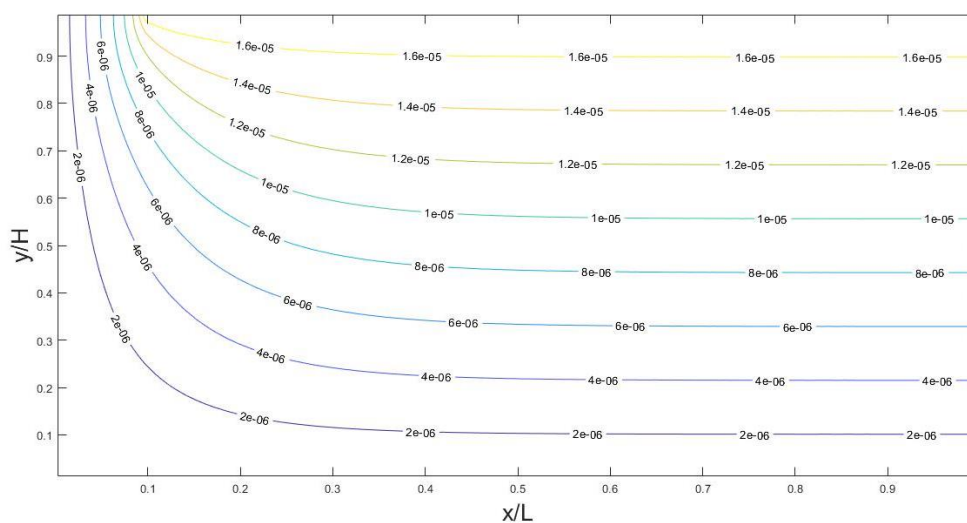


Figura 4.5.2. Isolinias de flujo para el Caso 5

La Figura 4.5.3 muestra el ábaco universal del caudal adimensional. Se puede apreciar cómo, para un valor monomio $\frac{k_x H^2}{L^2 k_y} \approx 1.6$ y para los tres valores parámetros del factor de forma $\frac{l_r}{L} = 0.025, 0.05$ y 0.1 , el grupo adimensional relativo al caudal $\left(\frac{Q}{(h_2-h_1)\sqrt{K_x K_y}}\right)$ no varía.

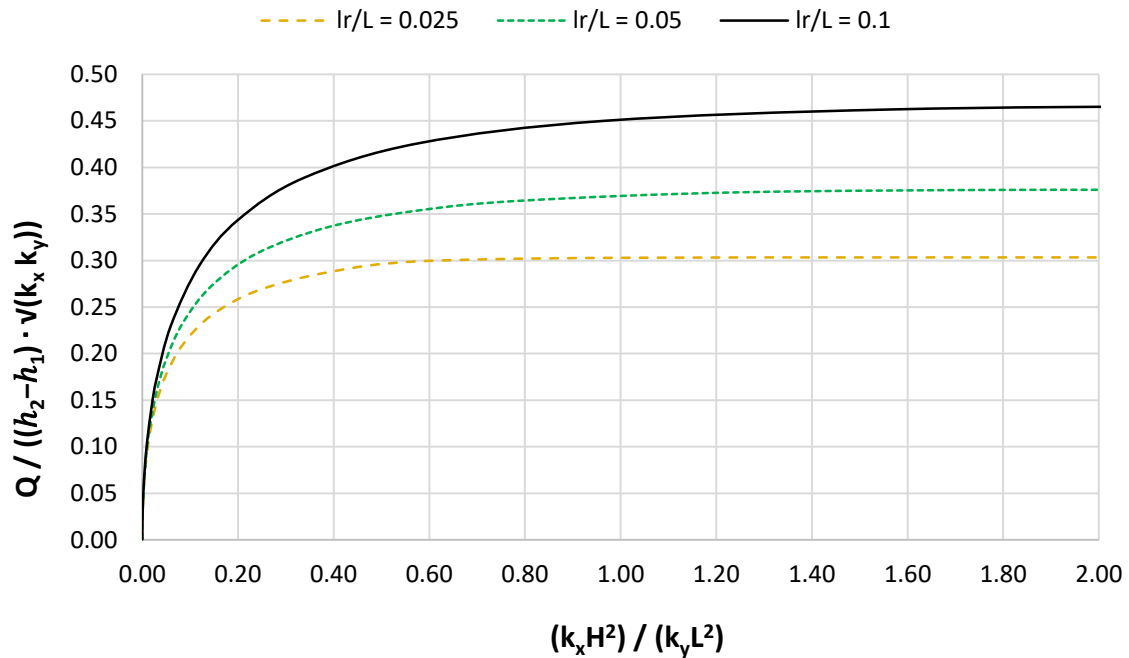


Figura 4.5.3. Ábaco universal de la dependencia (4.5.14), $\frac{Q}{(h_2-h_1)\sqrt{K_x K_y}} = \Psi_1 \left(\frac{K_x H^2}{L^2 K_y}, \frac{l_r}{L} \right)$

La Figura 4.5.4 muestra los perfiles verticales de potencial adimensional en la posición $x = l_r$, con $\frac{l_r}{L} = 0.1$, y valores del monomio $\frac{k_x H^2}{L^2 k_y}$ de 0.1, 0.5, 1, 5 y 10 (Casos 7, 8, 9, 10 y 11 de la Tabla 4.5.2).

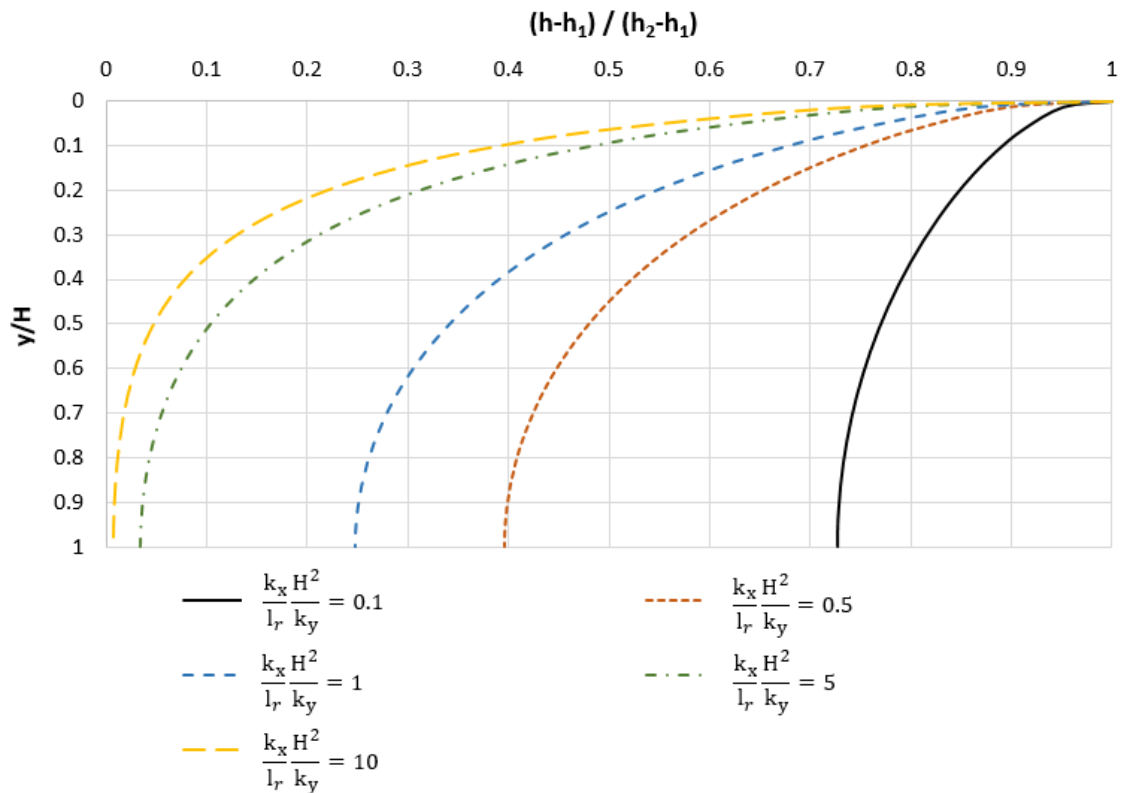


Figura 4.5.4. Perfiles verticales de potencial en $x = l_r$. Casos 7, 8, 9, 10 y 11.

$$\text{Dependencia } \frac{h-h_1}{h_2-h_1} = \Psi_2 \left(\frac{k_x H^2}{L^2 k_y}, \frac{l_r}{L}, \frac{x}{L}, \frac{y}{H} \right)$$

En la Figura 4.5.5 aparecen graficadas las superficies universales para la solución (4.5.19)

$\frac{T-T_1}{T_2-T_1} = \Psi_3 \left(\frac{k_x}{k_y}, \frac{\alpha_c}{k_y(h_2-h_1)}, \frac{L}{H}, \frac{l_r}{L}, \frac{x}{L}, \frac{y}{H} \right)$. Los parámetros de cada sábana universal son, por un

lado el cociente entre conductividades hidráulicas $\frac{k_x}{k_y}$ y, por otro, el grupo adimensional

$\frac{\alpha_c}{k_y(h_2-h_1)}$. Cada grupo de sábanas representa un mismo valor del factor de forma $\frac{l_r}{L}$.

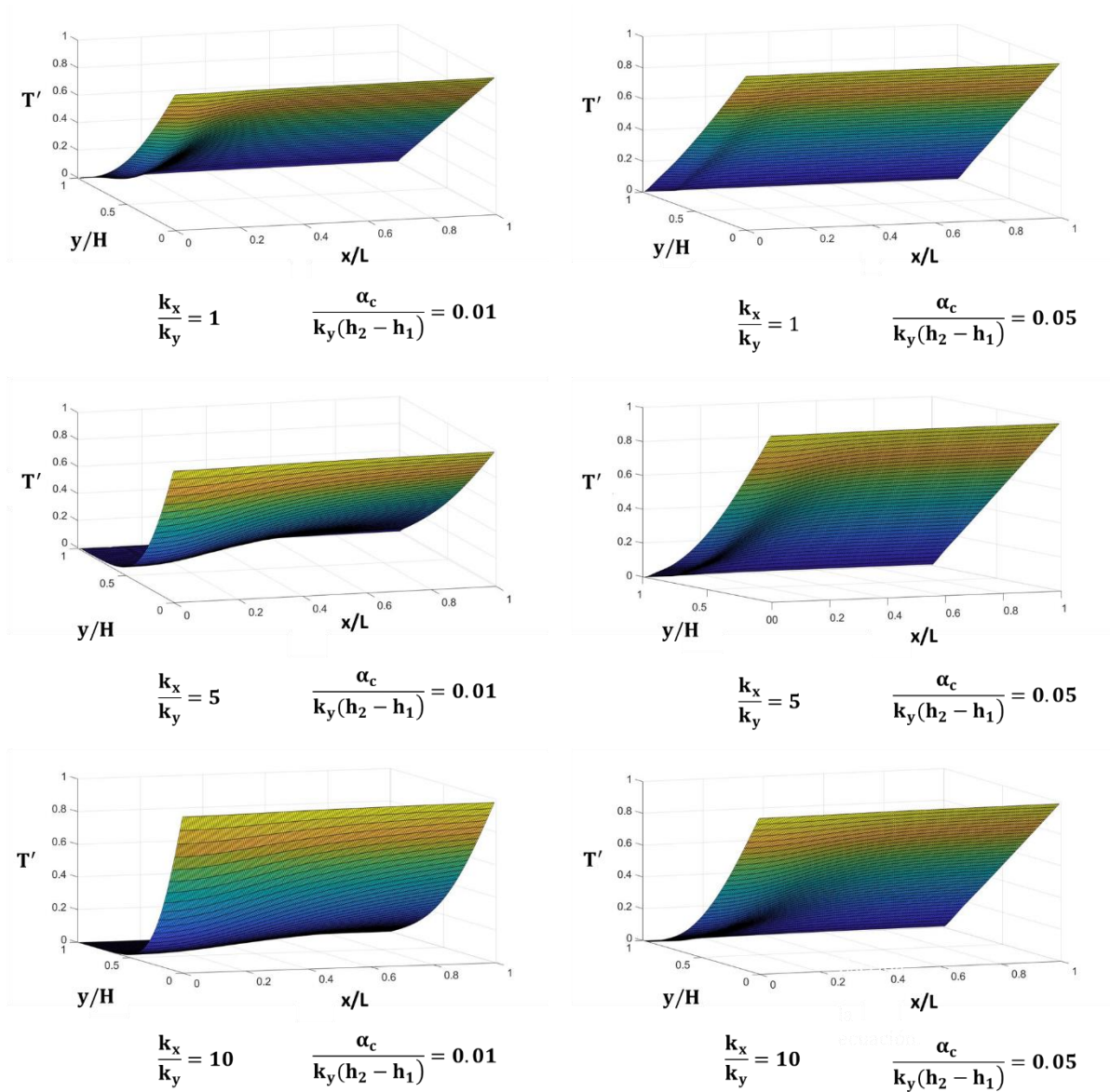


Figura 4.5.5.a. Superficies universales de $\frac{T-T_1}{T_2-T_1} = \Psi_4 \left(\frac{k_x}{k_y}, \frac{\alpha_c}{k_y(h_2-h_1)}, \frac{L}{H}, \frac{l_r}{L} = 0.1, \frac{x}{L}, \frac{y}{H} \right)$. Para $\frac{L}{H} = 10$

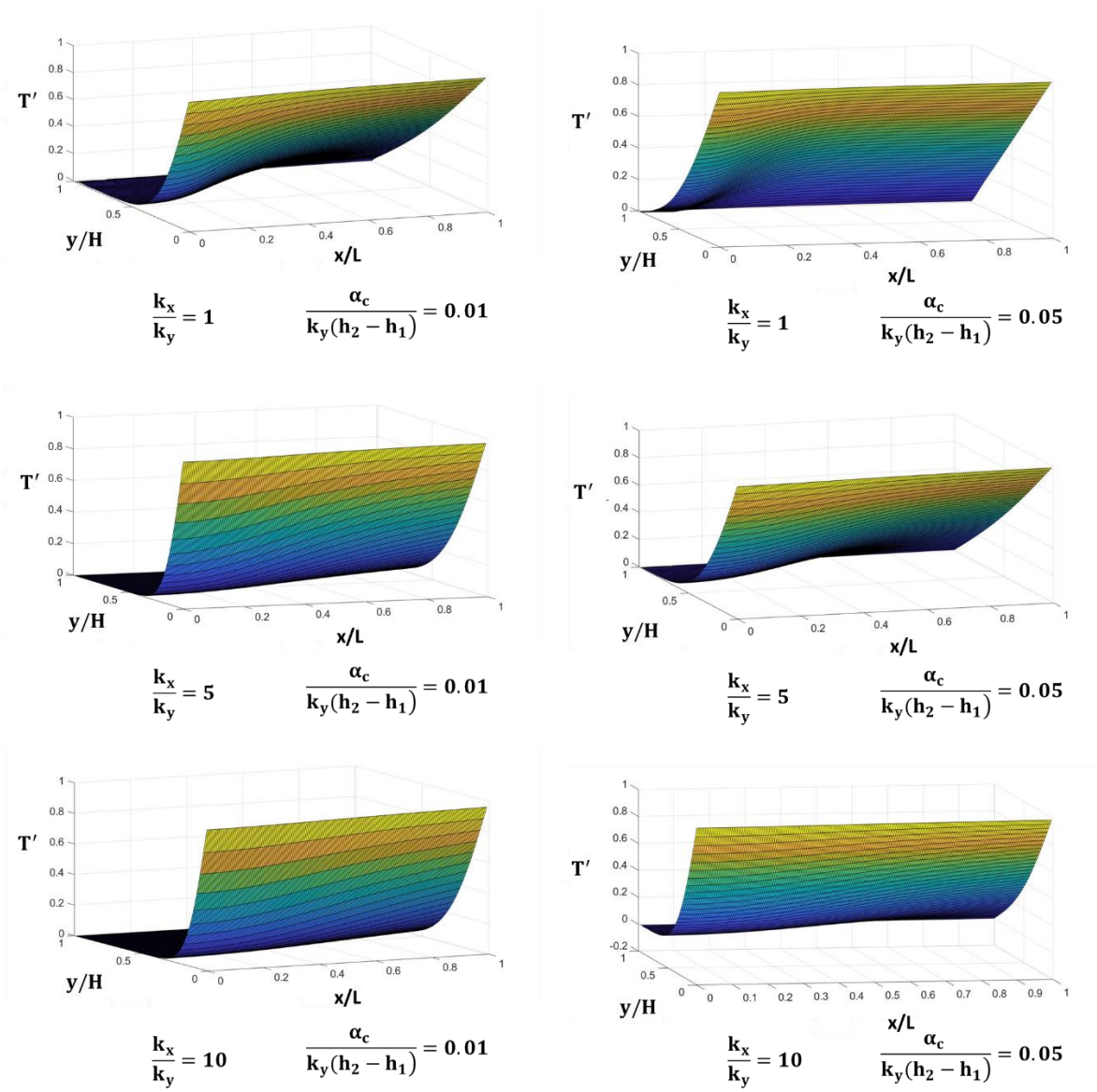


Figura 4.5.5.b. Superficies universales de $\frac{T-T_1}{T_2-T_1} = \Psi_4 \left(\frac{k_x}{k_y}, \frac{\alpha_c}{k_y(h_2-h_1)}, \frac{L}{H}, \frac{l_r}{L}, \frac{x}{L}, \frac{y}{H} \right)$. Para $\frac{L}{H} = 5$

El ábaco universal para la solución de la longitud características mecánica, $l_{x,v}^* = l_r \Psi_3 \left(\frac{K_x H^2}{L^2 K_y}, \frac{l_r}{L} \right)$, ecuación (4.5.16), se muestra en la Figura 4.5.6.

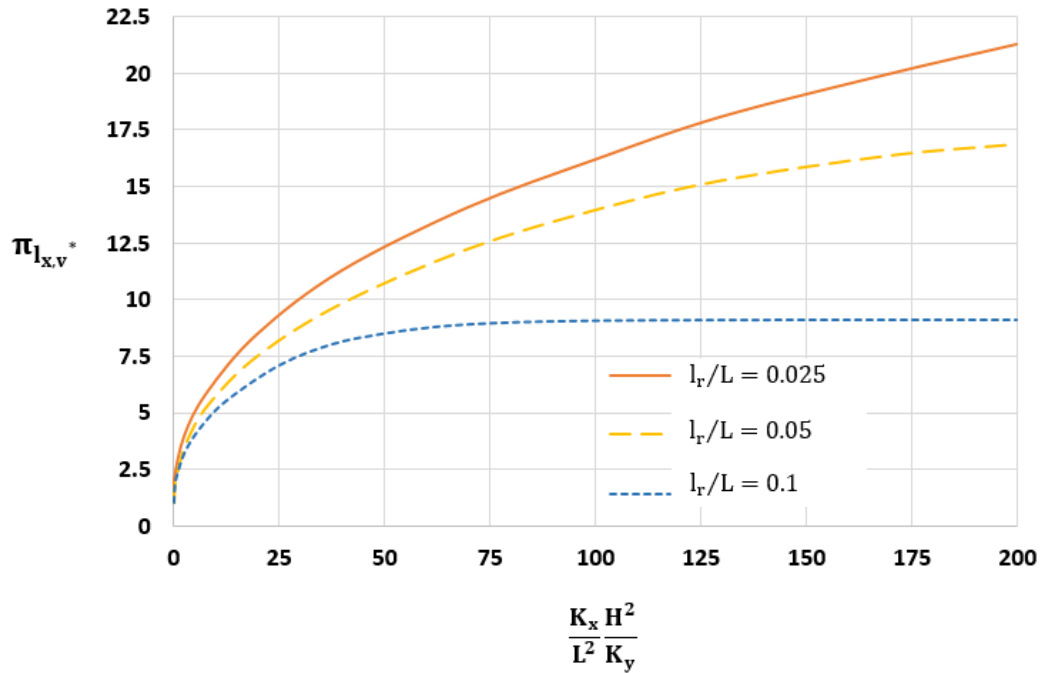


Figura 4.5.6. Ábaco universal $l_{x,v}^* = l_r * \Psi_3 \left(\frac{K_x H^2}{L^2 K_y}, \frac{l_r}{L} \right)$, ecuación (4.5.16)

4.5.6 Conclusiones

Se estudia un escenario en el cual se produce recarga de un río a un acuífero o descarga desde un acuífero a un río. El fondo del acuífero es impermeable y el flujo se produce debido a la diferencia de potenciales existente en las condiciones de contorno (borde derecho del dominio y ancho del río). Al ser un escenario simétrico, sólo es necesario estudiar una de las dos mitades (el eje vertical de simetría pasa por el centro del río). Debido al carácter impermeable del fondo del medio poroso, el flujo será oblicuo y de valor no constante a lo largo de una región horizontal en la cual la componente vertical irá perdiendo fuerza frente a la componente horizontal. Más allá de esta región definida a partir de una longitud característica hidráulica, la velocidad vertical será despreciable, considerándose únicamente la velocidad horizontal. El hecho de que la velocidad a la salida del dominio sea únicamente horizontal se debe a que la condición de contorno mecánica en el borde de salida del agua (derecho) es de potencial constante.

En este escenario, se puede desacoplar el problema hidráulico del problema térmico. Por lo tanto, el caudal adimensional, los potenciales adimensionales (y por tanto las componentes de la velocidad de flujo) y el valor de la longitud característica horizontal hidráulica no dependen de las temperaturas en las fronteras del dominio, tan sólo de la geometría del escenario, de las permeabilidades (horizontal y vertical) y del valor de los potenciales hidráulicos en las condiciones de contorno. Sin embargo, los patrones de temperatura en el dominio, además de depender de las condiciones térmicas en los contornos, dependerán a su vez de las propiedades

térmicas del medio, de las hidráulicas, de las condiciones de contorno mecánicas, de la geometría y, por supuesto, de la posición.

Mediante la técnica de adimensionalización discriminada y normalizada del modelo matemático se determinan los grupos adimensionales que rigen las soluciones del problema hidráulico y del problema térmico. Las dependencias obtenidas han sido verificadas por medio de simulaciones numéricas precisas y, posteriormente, han sido representadas gráficamente en forma de curvas, ábacos y superficies universales que podrán ser utilizadas en la propuesta de protocolos de problema inverso del siguiente capítulo.

Capítulo 5. Modelos de problema inverso y sus soluciones

- 5.1 Primera aplicación. Flujo vertical
- 5.2 Segunda aplicación. Flujo horizontal superficial
- 5.3 Tercera aplicación. Flujo horizontal con capa permeable sumergida
- 5.4 Cuarta aplicación. Flujo oblicuo
- 5.5 Quinta aplicación. Interacción río-acuífero

En el presente capítulo se proponen y desarrollan protocolos de problemas inversos para cada uno de los escenarios estudiados en el Capítulo 4. Los protocolos pueden ser de dos tipos. Bien, haciendo uso de las curvas y ábacos universales que han sido graficados a partir de las soluciones universales obtenidas tras adimensionalizar de forma discriminada y normalizada las ecuaciones de gobierno que integran el modelo matemático, bien mediante simulaciones numéricas siguiendo un protocolo particular o bien proponiendo un protocolo de problema inverso clásico.

Para la verificación de cada uno de los protocolos propuestos debe resolverse, en primer lugar, un problema directo del que conozcamos todas sus propiedades térmicas y geométricas, así como el valor de la variable velocidad de flujo (incluyendo su dirección y sentido). Los perfiles de temperatura obtenidos tras la resolución del problema directo, afectados por un error determinado, serán los datos de entrada al problema inverso o, lo que es lo mismo, las medidas experimentales en el campo.

5.1 Escenario de flujo vertical

Se proponen varios escenarios para la estimación de la velocidad vertical del agua subterránea que reproducen situaciones hidrogeológicas reales. En el caso de que la temperatura en la superficie sea constante, hay que asegurarse si se está o no en el estacionario, pues los protocolos de aplicación del problema inverso son diferentes. En el caso de temperatura armónica en superficie, se trabaja siempre en el estado estacionario y se hace uso de las amplitudes armónicas de la temperatura a diferentes profundidades en lugar de las temperaturas medias.

5.1.1 Nomenclatura

$e_{\%}$	error de medida
N	número de puntos de medida en un sondeo
T_{av}	temperatura en la frontera superior del acuífero ($^{\circ}C$)
T_i	temperatura "i" en el sondeo ($^{\circ}C$)
$(T_i - z_i)_{1 < i < N}$	perfil vertical de temperaturas tabulado
(T_i, z_i)	par de valores temperatura profundidad
T_o	temperatura en la frontera inferior del acuífero ($^{\circ}C$)
$(T_i' - z_i')_{1 < i < N, e_{\%}}$	perfil vertical adimensional de temperaturas tabulado afectado por un error aleatorio
$(T_i - z_i)_{1 < i < N, \text{problema directo}}$	perfil vertical de temperaturas obtenido en la resolución del problema directo
$(T_i - z_i)_{1 < i < N, t_1, e_{\%}}$	perfil vertical de temperaturas relativo al tiempo t_1
$(T_i - z_i)_{1 < i < N, t_2, e_{\%}}$	perfil vertical de temperaturas relativo al tiempo t_2
$v_{z,0,1}$	velocidad inicial de entrada al problema inverso (m/s)
z_i	profundidad "i" en la cual se registran temperaturas (m)

ΔT_{z_i}	amplitud de la temperatura en la profundidad "i" (°C)
$\Delta v_{z,0}$	incremento de velocidad vertical (m/s)
Φ	funcional que define la desviación promediada entra las medidas experimentales y la solución del problema
Φ_{t_1}, Φ_{t_2}	funcionales relativos a dos tiempos t_1 y t_2 en el caso transitorio

5.1.2 Temperatura constante en la superficie del terreno

Caso estacionario

Si se ha superado el transitorio, lo que puede comprobarse con medidores de temperatura en continuo, se miden las temperaturas a lo largo del perfil a profundidades regularmente distribuidas (z_i). Llamaremos a ese perfil vertical de temperaturas tabulado $(T_i - z_i)_{1 < i < N}$, con N el número de medidas en el sondeo. La temperatura (T_i) correspondiente a este perfil o tabla de pares de valores (T_i, z_i) se escribe en forma universal y adimensional usando la expresión $T'_i = \frac{T_i - T_{av}}{T_o - T_{av}}$, con T_{av} y T_o las temperaturas en las fronteras superior e inferior del dominio.

Este nuevo perfil vertical de temperaturas, resultado de medidas experimentales, es afectado por un error de medida $e\%$, lo que da lugar a una nueva tabla que escribiremos en la forma

$$(T'_i - z'_i)_{1 < i < N, e\%} \quad (5.1.1)$$

Representando los puntos de la ecuación (5.1.1) en el ábaco de la Figura 4.1.2 (Capítulo 4), cuyas curvas pueden completarse para un conjunto mayor de valores del parámetro $\frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{c_e \rho_e}{c_{e,w} \rho_{e,w}} \right)$, es posible hacer una estimación gráfica bastante aproximada del valor del grupo adimensional $\frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{c_e \rho_e}{c_{e,w} \rho_{e,w}} \right)$, a partir del cual puede estimarse la velocidad vertical $v_{z,0}$. Las propiedades térmicas del medio (conductividad térmica de la matriz agua-terreno y calores específicos del agua y de la matriz agua-terreno) y la profundidad H del acuífero han de ser conocidas.

También, puede estimarse la velocidad, sin auxilio del ábaco, mediante sucesivas simulaciones numéricas siguiendo el protocolo de la Figura 5.1.1. Siguiendo dicho protocolo, con los datos de propiedades térmicas y una velocidad inicial $v_{z,0,1}$ (que podría obtenerse groseramente de la Figura 4.1.2 a partir de la tabla definida en (5.1.1), $(T'_i - z'_i)_{1 < i < N, e\%}$, se resuelve el problema directo mediante simulación numérica. Esta solución, permitiría obtener la tabla de temperaturas que llamaremos $(T_i - z_i)_{1 < i < N, \text{problema directo}}$, tabla que inmediatamente traducimos a su forma adimensional, $(T'_i - z'_i)_{1 < i < N}$ con la expresión ya conocida $T' = \frac{T - T_{av}}{T_o - T_{av}}$.

El funcional

$$\Phi = \sum_{i=1}^N [(T'_i - z'_{i,e\%}) - (T'_i - z'_i)]^2 \quad (5.1.2)$$

define la desviación promediada entre las medidas experimentales y solución del problema directo para la velocidad inicial $v_{z,0,1}$. Modificando sucesivamente la velocidad a nuevos valores, por ejemplo $v_{z,0,1} + \Delta v_{z,0}$, $v_{z,0,1} + 2\Delta v_{z,0}$, $v_{z,0,1} + 3\Delta v_{z,0}$..., se van obteniendo los funcionales de las sucesivas simulaciones hasta que su valor sea suficientemente pequeño. Más allá de este punto, el valor del funcional se vuelve a incrementar, separando en promedio las soluciones del problema directo de las obtenidas experimentalmente. Reduciendo el valor incremental de la velocidad, $\Delta v_{z,0}$ puede conseguirse un ajuste más preciso, sin bien a costa de un mayor número de simulaciones que pueden aumentar excesivamente el tiempo de computación. Sin embargo, se puede optimizar el proceso de iteración tomando incrementos variables de $\Delta v_{z,0}$ o incrementos de signo cambiante, y crear una rutina de programación que lo haga automático, incluyendo en ella el arranque de la simulación, la lectura de resultados, cálculo de funcionales, criterios de decisión etc., a fin de conseguir un resultado aceptable con un número limitado de simulaciones.

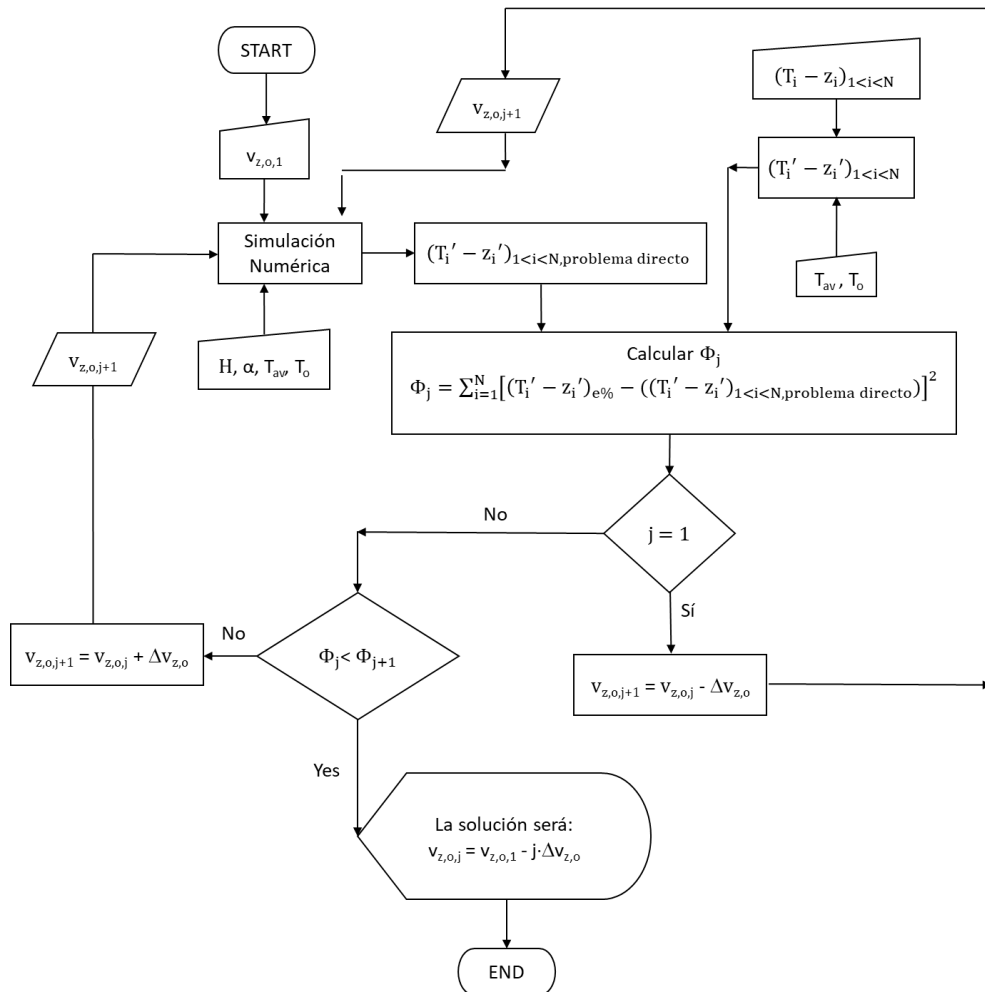


Figura 5.1.1. Protocolo para el problema inverso de la estimación de velocidades verticales (caso estacionario)

El siguiente ejemplo muestra la eficacia del protocolo propuesto mediante simulaciones numéricas. Los datos geométricos y los parámetros térmicos del escenario del problema directo, se muestran en la Tabla 5.1.1.

Datos geométricos	H = 2 m $z_{i+1} - z_i = 0.2$ N = 9
Propiedades térmicas	$k_m = 0.625 \text{ cal}/(\text{sm}^\circ\text{C})$ $\rho_e c_e = 0.625 \cdot 10^6 \text{ cal}/(\text{m}^3^\circ\text{C})$ $\alpha = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
Condiciones térmicas de contorno	$T_{av} = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ $T_o = 11 \text{ }^\circ\text{C}$
Velocidad vertical	$v_{z,o} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$

Tabla 5.1.1. Datos del escenario del problema directo

Las medidas experimentales que constituyen los datos de entrada del problema inverso aparecen reflejadas en la Tabla 5.1.3. Se han construido afectando de errores del 1 y 3% las temperaturas correspondientes a la solución del problema directo (que aparecen reflejadas en la Tabla 5.1.2). Se han registrado un total de 9 temperaturas a profundidades distribuidas regularmente dentro del dominio desde la superficie hasta el fondo, donde la temperatura se mantiene constante. Ya se ha dicho que la forma adimensional de T se obtiene de la expresión

$$T' = \frac{T - T_{av}}{T_o - T_{av}}$$

		$(T_i - z_i)_{1 < i < N, \text{problema directo (}^\circ\text{C)}$	$(T'_i - z'_i)_{1 < i < N, \text{problema directo}}$
$z_1 = 0.2 \text{ m}$	$z_1' = 0.1$	10.205	0.205
$z_2 = 0.4 \text{ m}$	$z_2' = 0.2$	10.374	0.374
$z_3 = 0.6 \text{ m}$	$z_3' = 0.3$	10.513	0.513
$z_4 = 0.8 \text{ m}$	$z_4' = 0.4$	10.628	0.628
$z_5 = 1.0 \text{ m}$	$z_5' = 0.5$	10.723	0.723
$z_6 = 1.2 \text{ m}$	$z_6' = 0.6$	10.802	0.802
$z_7 = 1.4 \text{ m}$	$z_7' = 0.7$	10.866	0.866
$z_8 = 1.6 \text{ m}$	$z_8' = 0.8$	10.920	0.920
$z_9 = 1.8 \text{ m}$	$z_9' = 0.9$	10.964	0.964

Tabla 5.1.2. Temperaturas solución del problema directo

	$(T'_i - z'_i)_{e=1\%}$	$(T'_i - z'_i)_{e=3\%}$
$z_1' = 0.1$	0.205	0.202
$z_2' = 0.2$	0.372	0.377
$z_3' = 0.3$	0.515	0.513
$z_4' = 0.4$	0.630	0.628
$z_5' = 0.5$	0.722	0.718
$z_6' = 0.6$	0.799	0.809
$z_7' = 0.7$	0.866	0.884
$z_8' = 0.8$	0.914	0.902
$z_9' = 0.9$	0.960	0.967

Tabla 5.1.3. Las temperaturas de entrada del problema inverso están afectadas por errores del 1 y 3%

Representando el perfil de temperaturas adimensional afectado por un error del 1% que actúa como dato de entrada al problema inverso $(T'_i - z'_i)_{e=1\%}$, que aparece reflejado en la segunda columna de la Tabla 5.1.3, sobre el Ábaco Universal A (Figura 4.1.2.a) se puede hacer una estimación inicial del monomio $\frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{c_e \rho_e}{c_{e,w} \rho_{e,w}} \right) \approx 0.7$ (Figura 5.1.2). Despejando la velocidad vertical de dicho monomio, se obtiene una velocidad inicial $v_{z,0,1} = 4.46 \cdot 10^{-7}$ m/s. Haciendo lo mismo para el perfil de temperaturas adimensional afectado por un error del 3%, $(T'_i - z'_i)_{e=3\%}$, la estimación inicial del monomio es $\frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{c_e \rho_e}{c_{e,w} \rho_{e,w}} \right) \approx 0.7$. Despejando la velocidad vertical de dicho monomio, se obtiene una velocidad inicial $v_{z,0,1} = 4.46 \cdot 10^{-7}$ m/s. Véase Figura 5.1.2.b.

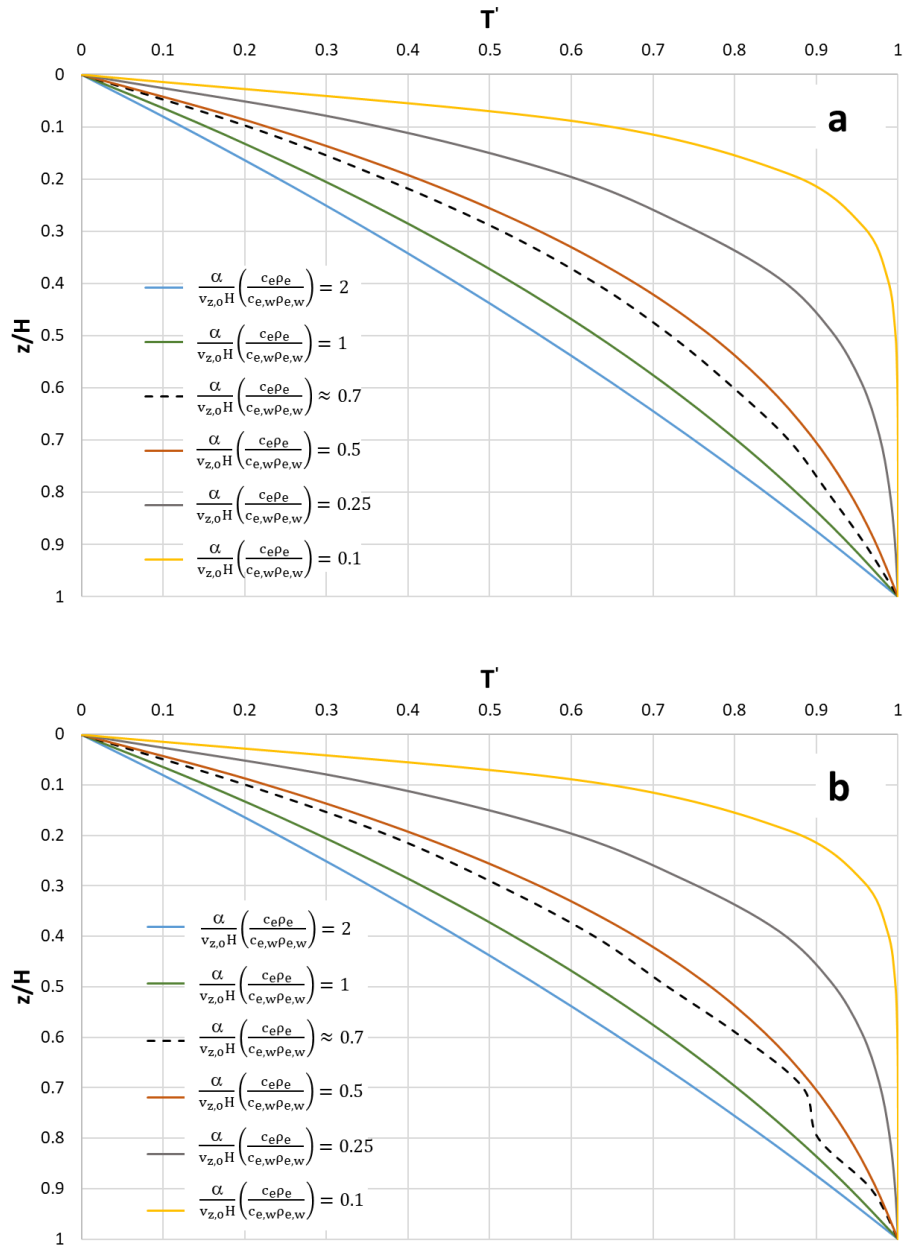


Figura 5.1.2. Estimación del monomio $\frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{c_e \rho_e}{c_{e,w} \rho_{e,w}} \right)$ y determinación de la velocidad $v_{z,0,1}$ para las mediciones de temperatura afectadas por un error del 1% (a) y del 3% (b), haciendo uso del Ábaco Universal A (Figura 4.1.2)

En las tablas 5.1.4 y 5.1.5 aparecen reflejados los resultados parciales del problema inverso para $(T'_i - z'_i)_{e=1\%}$ y $(T'_i - z'_i)_{e=3\%}$, respectivamente. Para valores del funcional $\varphi \approx 10^{-4}$, la estimación de la velocidad vertical a partir de un perfil de temperaturas afectado por un error del 1%, es igual a la velocidad real del agua subterránea. Sin embargo, la estimación de la velocidad a partir de un perfil de temperaturas afectado por un error del 3%, es igual a la velocidad real del agua subterránea para valores del funcional $\varphi \approx 10^{-3}$.

		$v_{z,0,1} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$		$v_{z,0,2} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$		$v_{z,0,3} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$	
z/H	$T'_{i,e=1\%}$	T'_i	$(T'_{i,e=1\%} - T'_i)^2$	T'_i	$(T'_{i,e=1\%} - T'_i)^2$	T'_i	$(T'_{i,e=1\%} - T'_i)^2$
0.1	0.2052	0.1660	0.0015	0.1850	0.0004	0.2050	$2.25254 \cdot 10^{-8}$
0.2	0.3718	0.3130	0.0035	0.3430	0.0008	0.3740	$4.73725 \cdot 10^{-6}$
0.3	0.5149	0.4220	0.0086	0.4780	0.0013	0.5130	$3.68329 \cdot 10^{-6}$
0.4	0.6301	0.5550	0.0056	0.5920	0.0015	0.6280	$4.53378 \cdot 10^{-6}$
0.5	0.7221	0.6550	0.0045	0.6900	0.0010	0.7230	$8.70282 \cdot 10^{-7}$
0.6	0.7986	0.7430	0.0031	0.7730	0.0007	0.8020	$1.1232 \cdot 10^{-5}$
0.7	0.8664	0.8200	0.0022	0.8440	0.0005	0.8660	$1.46487 \cdot 10^{-7}$
0.8	0.9139	0.8880	0.0007	0.9050	$7.8539 \cdot 10^{-5}$	0.9200	$3.76721 \cdot 10^{-5}$
0.9	0.9599	0.9470	0.0002	0.9560	$1.5286 \cdot 10^{-5}$	0.9640	$1.67299 \cdot 10^{-5}$
		$\varphi_1 = 0.0299$		$\varphi_2 = 0.0063$		$\varphi_3 = 7.9628 \cdot 10^{-5}$	

Tabla 5.1.4. Resultados parciales del problema inverso para $(T'_i - z'_i)_{e=1\%}$

		$v_{z,0,1} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$		$v_{z,0,2} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$		$v_{z,0,3} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$	
z/H	$T'_{i,e=3\%}$	T'_i	$(T'_{i,e=3\%} - T'_i)^2$	T'_i	$(T'_{i,e=3\%} - T'_i)^2$	T'_i	$(T'_{i,e=3\%} - T'_i)^2$
0.1	0.2024	0.1660	0.0013	0.1850	0.0003	0.2050	$6.6403 \cdot 10^{-6}$
0.2	0.3774	0.3130	0.0041	0.3430	0.0012	0.3740	$1.1295 \cdot 10^{-5}$
0.3	0.5127	0.4220	0.0082	0.4780	0.0012	0.5130	$9.6010 \cdot 10^{-8}$
0.4	0.6283	0.5550	0.0054	0.5920	0.0013	0.6280	$1.0693 \cdot 10^{-7}$
0.5	0.7180	0.6550	0.0040	0.6900	0.0008	0.7230	$2.4964 \cdot 10^{-5}$
0.6	0.8091	0.7430	0.0044	0.7730	0.0013	0.8020	$5.0355 \cdot 10^{-5}$
0.7	0.8835	0.8200	0.0040	0.8440	0.0016	0.8660	$3.0678 \cdot 10^{-4}$
0.8	0.9022	0.8880	0.0002	0.9050	0.0000	0.9200	$3.1675 \cdot 10^{-4}$
0.9	0.9666	0.9470	0.0004	0.9560	0.0001	0.9640	$6.8799 \cdot 10^{-6}$
		$\varphi_1 = 0.0320$		$\varphi_2 = 0.0078$		$\varphi_3 = 0.0007$	

Tabla 5.1.5. Resultados parciales del problema inverso para $(T'_i - z'_i)_{e=3\%}$

Caso transitorio

Cuando el perfil tabulado de temperatura, que constituye los datos experimentales de entrada para el problema inverso, no se ajusta en su forma a los perfiles estacionarios de la Figura 4.1.2, es evidente que no puede aplicarse el protocolo anterior. Se sabe, entonces, que nos

encontramos ante un perfil transitorio, situación que podríamos confirmar observando el cambio del perfil correspondiente a medidas en tiempos más avanzados.

En este caso el protocolo puede realizarse también por dos vías diferentes, usando las representaciones universales de perfiles transitorios (con un conjunto de curvas lo más completo posible), o bien recurriendo a sucesivas iteraciones numéricas. En el primer caso, se parte de una tabla de N temperaturas (registradas a profundidades diferentes y conocidas) obtenidas por lectura directa con instrumentos de error definido ($e\%$), $(T_i - z_i)_{1 < i < N, t_1, e\%}$ y $(T_i - z_i)_{1 < i < N, t_2, e\%}$. Con estos perfiles y, conocidas las propiedades térmicas y la geometría del problema, entramos en los ábacos de la Figura 4.1.4 (que distinguen claramente los flujos ascendente y descendente) para estimar a qué par de curvas se ajustan mejor los perfiles anteriores descritos, anotando los tiempos adimensionales t'_1 y t'_2 asociados a las curvas seleccionadas. A partir de la relación

$$t_2 - t_1 = (t'_2 - t'_1)\tau^* \quad (5.1.3)$$

se obtiene el valor del tiempo característico τ^* . Con este dato, entrando en la curva universal B (representada en la Figura 4.1.3), se obtiene el valor del monomio $\frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{c_e \rho_e}{c_{e,w} \rho_{e,w}} \right)$ del que se puede despejar finalmente la velocidad final estimada.

El protocolo de problema inverso alternativo, para el caso en el que se recurre a simulaciones numéricas directamente, se muestra en la Figura 5.1.3.

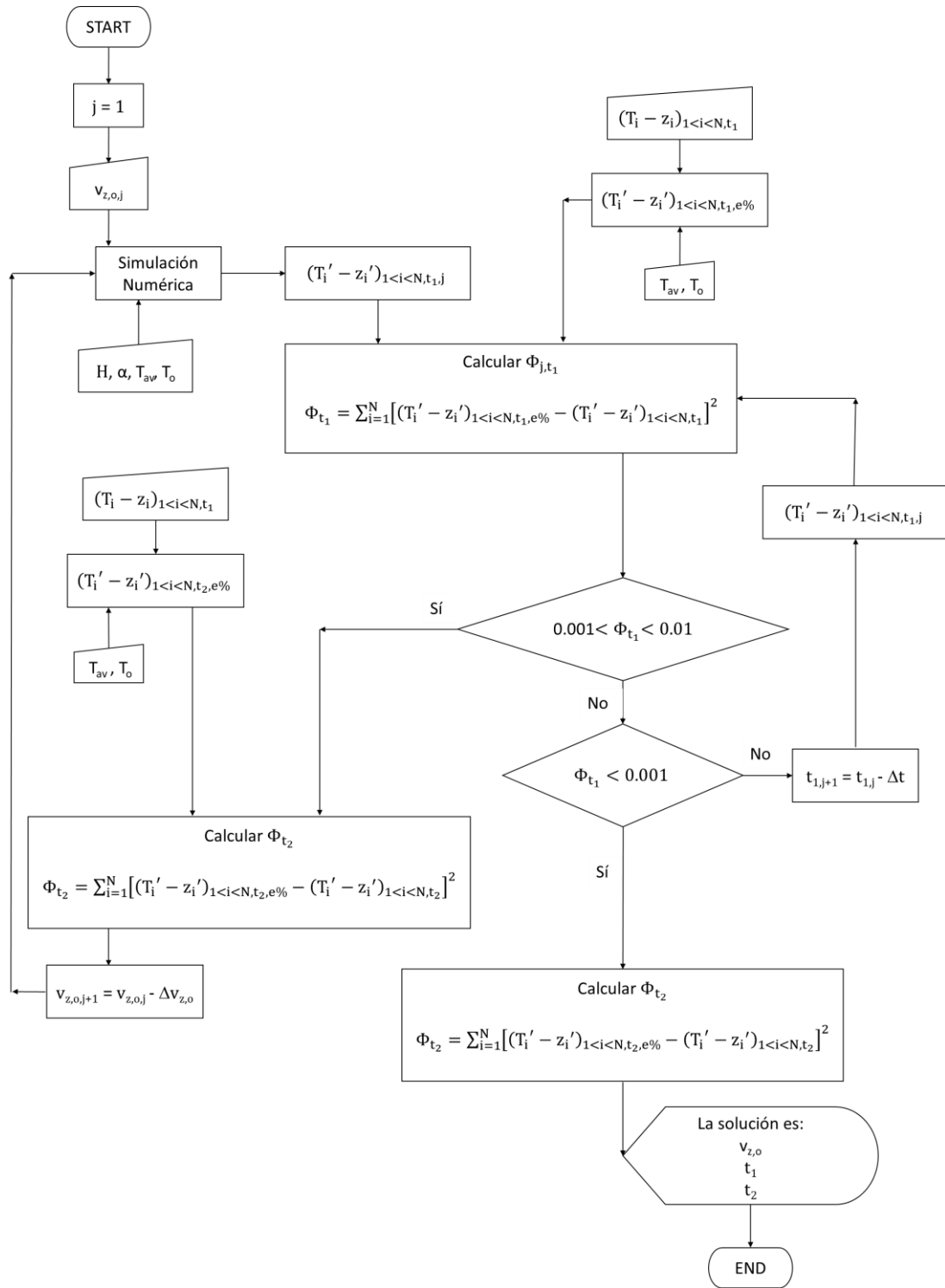


Figura 5.1.3. Protocolo para el problema inverso de la estimación de velocidades (caso transitorio)

Se selecciona, en primer lugar y por inspección (a partir de la forma de los perfiles $(T_i - z_i)_{1 < i < N, t_1, e\%}$ y $(T_i - z_i)_{1 < i < N, t_2, e\%}$) el tipo de flujo, ascendente o descendente. A continuación, con los datos de las propiedades térmicas, la geometría del acuífero y una velocidad inicial $v_{z,0,j=1}$ se resuelve el problema directo (para el transitorio) mediante

simulación numérica. Esta solución permitiría obtener la tabla $(T_i - z_i)_{1 < i < N, t_1, j}$, correspondiente al instante $t_{1,j}$ del transitorio, que haga mínimo el funcional

$$\Phi_{t_1} = \sum_{i=1}^N [(T_i - z_i)_{1 < i < N, t_1, e\%} - (T_i - z_i)_{1 < i < N, t_1}]^2 \quad (5.1.4)$$

El funcional para el tiempo en el transitorio t_2 se calcula una vez obtenido el funcional Φ_{t_1} y siempre y cuando $0.001 < \Phi_{t_1} < 0.01$ ó $\Phi_{t_1} < 0.001$.

$$\Phi_{t_2} = \sum_{i=1}^N [(T_i - z_i)_{1 < i < N, t_2, e\%} - (T'_i - z'_i)_{1 < i < N, t_2}]^2 \quad (5.1.5)$$

Modificar la velocidad inicial a valores sucesivamente crecientes $v_{z,0,1} + \Delta v_{z,0,1}$, $v_{z,0,1} + 2\Delta v_{z,0,1}$, $v_{z,0,1} + 3\Delta v_{z,0,1} \dots$, o decrecientes $v_{z,0,1} - \Delta v_{z,0,1}$, $v_{z,0,1} - 2\Delta v_{z,0,1}$, $v_{z,0,1} - 3\Delta v_{z,0,1} \dots$ hasta que los funcionales tengan un valor mínimo correspondiente al valor más preciso de la estimación. Se puede tomar como preciso un funcional $0.001 < \Phi_{t_1} < 0.01$.

Los datos del problema directo aparecen reflejados en la Tabla 5.1.6. Los resultados del mismo, para dos tiempos distintos de simulación (obtenidos durante el transitorio) antes de alcanzar el estacionario, t_1 y t_2 , serán los perfiles verticales adimensionales de temperatura utilizados como datos de entrada para la resolución del problema inverso. Véase Tablas 5.1.7 y 5.1.8.

Datos geométricos	H = 2 m $z_{i+1} - z_i = 0.2$ N = 9
Propiedades térmicas	$k_m = 0.625 \text{ cal}/(\text{sm}^\circ\text{C})$ $\rho_e c_e = 0.625 \cdot 10^6 \text{ cal}/(\text{m}^3^\circ\text{C})$ $\alpha = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
Condiciones térmicas de contorno	$T_{av} = 10^\circ\text{C}$ $T_0 = 11^\circ\text{C}$
Tiempos transitorio	$t_1 = 0.3 \cdot 10^6 \text{ s}$ $t_2 = 0.5 \cdot 10^6 \text{ s}$ $t_2 - t_1 = 0.2 \cdot 10^6 \text{ s}$
Velocidad vertical	$v_{z,0} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$

Tabla 5.1.6. Datos del escenario del problema directo para el problema transitorio

		$(T_i - z_i)_{1 < i < N, t_1}$ (°C)	$(T'_i - z'_i)_{1 < i < N, t_1}$ (°C)
$z_1 = 0.2$ m	$z'_1 = 0.1$	10.030	0.030
$z_2 = 0.4$ m	$z'_2 = 0.2$	10.065	0.065
$z_3 = 0.6$ m	$z'_3 = 0.3$	10.115	0.115
$z_4 = 0.8$ m	$z'_4 = 0.4$	10.187	0.187
$z_5 = 1.0$ m	$z'_5 = 0.5$	10.284	0.284
$z_6 = 1.2$ m	$z'_6 = 0.6$	10.406	0.406
$z_7 = 1.4$ m	$z'_7 = 0.7$	10.549	0.549
$z_8 = 1.6$ m	$z'_8 = 0.8$	10.703	0.703
$z_9 = 1.8$ m	$z'_9 = 0.9$	10.857	0.857

Tabla 5.1.7. Temperaturas solución del problema directo para el problema transitorio para el tiempo t_1

		$(T_i - z_i)_{1 < i < N, t_2}$ (°C)	$(T'_i - z'_i)_{1 < i < N, t_2}$ (°C)
$z_1 = 0.2$ m	$z'_1 = 0.1$	10.085	0.085
$z_2 = 0.4$ m	$z'_2 = 0.2$	10.167	0.167
$z_3 = 0.6$ m	$z'_3 = 0.3$	10.253	0.253
$z_4 = 0.8$ m	$z'_4 = 0.4$	10.348	0.348
$z_5 = 1.0$ m	$z'_5 = 0.5$	10.451	0.451
$z_6 = 1.2$ m	$z'_6 = 0.6$	10.563	0.563
$z_7 = 1.4$ m	$z'_7 = 0.7$	10.678	0.678
$z_8 = 1.6$ m	$z'_8 = 0.8$	10.793	0.793
$z_9 = 1.8$ m	$z'_9 = 0.9$	10.902	0.902

Tabla 5.1.8. Temperaturas solución del problema directo para el problema transitorio para el tiempo t_2

Las temperaturas de entrada al problema inverso, adimensionalizadas y afectadas por errores del 1% y del 3% para ser consideradas como datos obtenidos en campo, están recogidas en la Tabla 5.1.9.

	$(T_i' - z_i')_{t_1, e=1\%}$	$(T_i' - z_i')_{t_2, e=1\%}$	$(T_i' - z_i')_{t_1, e=3\%}$	$(T_i' - z_i')_{t_2, e=3\%}$
$z_1' = 0.1$	0.030	0.084	0.030	0.085
$z_2' = 0.2$	0.065	0.167	0.065	0.169
$z_3' = 0.3$	0.115	0.251	0.112	0.252
$z_4' = 0.4$	0.186	0.345	0.191	0.354
$z_5' = 0.5$	0.286	0.452	0.277	0.456
$z_6' = 0.6$	0.409	0.564	0.395	0.575
$z_7' = 0.7$	0.551	0.678	0.551	0.691
$z_8' = 0.8$	0.703	0.792	0.704	0.784
$z_9' = 0.9$	0.856	0.893	0.869	0.904

Tabla 5.1.9. Temperaturas de entrada del problema inverso aparecen afectadas por errores del 1 y del 3% para los tiempo t_1 y t_2

Los resultados parciales para el ejemplo del protocolo de problema inverso, para velocidades de simulación de $v_{z,0,1} = 1 \cdot 10^{-7}$, $3 \cdot 10^{-7}$ y $4 \cdot 10^{-7}$ m/s, aparecen recogidos en las Tablas 5.1.10, 5.1.11, 5.1.12 para los perfiles transitorios afectados por un error del 1% y en las Tablas 5.1.13, 5.1.14 y 5.1.15 para los perfiles afectados por un error del 3%.

			$v_{z,0,1} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$			
z/H	$T'_{i,t_1,e=1\%}$	$T'_{i,t_2,e=1\%}$	$T'_{i,t_1=0.4 \text{ Ms}}$	$T'_{i,t_2=0.6 \text{ Ms}}$	$\left(T'_{i,t_1=0.4 \text{ Ms}} - T'_{i,t_1,e=1\%}\right)^2$	$\left(T'_{i,t_2=0.6 \text{ Ms}} - T'_{i,t_2,e=1\%}\right)^2$
0.1	0.030	0.084	0.034	0.064	$1.732 \cdot 10^{-5}$	$4.509 \cdot 10^{-4}$
0.2	0.065	0.167	0.074	0.134	$7.645 \cdot 10^{-5}$	$1.200 \cdot 10^{-3}$
0.3	0.115	0.251	0.126	0.205	$1.273 \cdot 10^{-4}$	$2.172 \cdot 10^{-3}$
0.4	0.186	0.345	0.195	0.289	$8.676 \cdot 10^{-5}$	$4.213 \cdot 10^{-3}$
0.5	0.286	0.452	0.284	0.384	$5.035 \cdot 10^{-6}$	$5.114 \cdot 10^{-3}$
0.6	0.409	0.564	0.396	0.492	$1.769 \cdot 10^{-4}$	$6.891 \cdot 10^{-3}$
0.7	0.551	0.678	0.528	0.610	$5.381 \cdot 10^{-4}$	$6.494 \cdot 10^{-3}$
0.8	0.703	0.792	0.677	0.737	$6.818 \cdot 10^{-4}$	$2.240 \cdot 10^{-3}$
0.9	0.856	0.893	0.837	0.868	$3.525 \cdot 10^{-4}$	$1.331 \cdot 10^{-3}$
					$\phi_1 = 0.002$	$\phi_2 = 0.030$

Tabla 5.1.10. Resultados parciales para el ejemplo del protocolo de problema inverso en el transitorio para una $v_{z,0,1} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$ y un error en las medidas del 1%

			$v_{z,0,1} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$			
z/H	$T'_{i,t_1,e=1\%}$	$T'_{i,t_2,e=1\%}$	$T'_{i,t_1=0.35 \text{ Ms}}$	$T'_{i,t_2=0.55 \text{ Ms}}$	$\left(T'_{i,t_1=0.35 \text{ Ms}} - T'_{i,t_1,e=1\%}\right)^2$	$\left(T'_{i,t_2=0.55 \text{ Ms}} - T'_{i,t_2,e=1\%}\right)^2$
0.1	0.030	0.084	0.034	0.076	$1.732 \cdot 10^{-5}$	$6.935 \cdot 10^{-5}$
0.2	0.065	0.167	0.074	0.151	$7.645 \cdot 10^{-5}$	$2.643 \cdot 10^{-4}$
0.3	0.115	0.251	0.126	0.232	$1.273 \cdot 10^{-4}$	$3.800 \cdot 10^{-4}$
0.4	0.186	0.345	0.198	0.322	$1.517 \cdot 10^{-4}$	$5.435 \cdot 10^{-4}$
0.5	0.286	0.452	0.291	0.421	$2.262 \cdot 10^{-5}$	$9.630 \cdot 10^{-4}$
0.6	0.409	0.564	0.407	0.531	$5.287 \cdot 10^{-6}$	$1.091 \cdot 10^{-3}$
0.7	0.551	0.678	0.543	0.648	$6.719 \cdot 10^{-5}$	$9.159 \cdot 10^{-4}$
0.8	0.703	0.792	0.693	0.768	$1.022 \cdot 10^{-4}$	$5.994 \cdot 10^{-4}$
0.9	0.856	0.893	0.849	0.887	$4.590 \cdot 10^{-5}$	$3.715 \cdot 10^{-5}$
					$\phi_1 = 0.0006$	$\phi_2 = 0.0049$

Tabla 5.1.11. Resultados parciales para el ejemplo del protocolo de problema inverso en el transitorio para una $v_{z,0,2} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$ y un error en las medidas del 1%

$v_{z,0,1} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$						
z/H	$T'_{i_{t_1, e=1\%}}$	$T'_{i_{t_2, e=1\%}}$	$T'_{i_{t_1=0.315 \text{ Ms}}}$	$T'_{i_{t_2=0.515 \text{ Ms}}}$	$\left(T'_{i_{t_1=0.315 \text{ Ms}}} - T'_{i_{t_1, e=1\%}} \right)^2$	$\left(T'_{i_{t_2=0.515 \text{ Ms}}} - T'_{i_{t_2, e=1\%}} \right)^2$
0.1	0.030	0.084	0.030	0.079	$2.612 \cdot 10^{-8}$	$2.838 \cdot 10^{-5}$
0.2	0.065	0.167	0.066	0.156	$5.527 \cdot 10^{-7}$	$1.268 \cdot 10^{-4}$
0.3	0.115	0.251	0.116	0.239	$1.645 \cdot 10^{-6}$	$1.561 \cdot 10^{-4}$
0.4	0.186	0.345	0.185	0.330	$4.697 \cdot 10^{-7}$	$2.345 \cdot 10^{-4}$
0.5	0.286	0.452	0.279	0.431	$5.247 \cdot 10^{-5}$	$4.424 \cdot 10^{-4}$
0.6	0.409	0.564	0.397	0.542	$1.513 \cdot 10^{-4}$	$4.854 \cdot 10^{-4}$
0.7	0.551	0.678	0.537	0.659	$2.016 \cdot 10^{-4}$	$3.711 \cdot 10^{-4}$
0.8	0.703	0.792	0.691	0.778	$1.467 \cdot 10^{-4}$	$2.098 \cdot 10^{-4}$
0.9	0.856	0.893	0.849	0.893	$4.590 \cdot 10^{-5}$	$8.996 \cdot 10^{-9}$
					$\phi_1 = 0.0006$	$\phi_2 = 0.0021$

Tabla 5.1.12. Resultados parciales para el ejemplo del protocolo de problema inverso en el transitorio para una $v_{z,0,2} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$ y un error en las medidas del 1%

$v_{z,0,1} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$						
z/H	$T'_{i_{t_1, e=3\%}}$	$T'_{i_{t_2, e=3\%}}$	$T'_{i_{t_1=0.4 \text{ Ms}}}$	$T'_{i_{t_2=0.6 \text{ Ms}}}$	$\left(T'_{i_{t_1=0.4 \text{ Ms}}} - T'_{i_{t_1, e=3\%}} \right)^2$	$\left(T'_{i_{t_2=0.6 \text{ Ms}}} - T'_{i_{t_2, e=3\%}} \right)^2$
0.1	0.030	0.085	0.034	0.064	$1.726 \cdot 10^{-5}$	$4.509 \cdot 10^{-4}$
0.2	0.065	0.169	0.074	0.134	$8.792 \cdot 10^{-5}$	$1.200 \cdot 10^{-3}$
0.3	0.112	0.252	0.126	0.205	$1.931 \cdot 10^{-4}$	$2.172 \cdot 10^{-3}$
0.4	0.191	0.354	0.195	0.289	$1.535 \cdot 10^{-5}$	$4.213 \cdot 10^{-3}$
0.5	0.277	0.456	0.284	0.384	$5.126 \cdot 10^{-5}$	$5.114 \cdot 10^{-3}$
0.6	0.395	0.575	0.396	0.492	$2.678 \cdot 10^{-7}$	$6.891 \cdot 10^{-3}$
0.7	0.551	0.691	0.528	0.610	$5.482 \cdot 10^{-4}$	$6.494 \cdot 10^{-3}$
0.8	0.704	0.784	0.677	0.737	$7.282 \cdot 10^{-4}$	$2.240 \cdot 10^{-3}$
0.9	0.869	0.904	0.837	0.868	$1.036 \cdot 10^{-3}$	$1.331 \cdot 10^{-3}$
					$\phi_1 = 0.0027$	$\phi_2 = 0.030$

Tabla 5.1.13. Resultados parciales para el ejemplo del protocolo de problema inverso en el transitorio para una $v_{z,0,1} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$ y un error en las medidas del 3%

$v_{z,0,1} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$						
z/H	$T'_{i_{t_1, e=3\%}}$	$T'_{i_{t_2, e=3\%}}$	$T'_{i_{t_1=0.35 \text{ Ms}}}$	$T'_{i_{t_2=0.55 \text{ Ms}}}$	$\left(T'_{i_{t_1=0.35 \text{ Ms}}} - T'_{i_{t_1, e=3\%}}\right)^2$	$\left(T'_{i_{t_2=0.55 \text{ Ms}}} - T'_{i_{t_2, e=3\%}}\right)^2$
0.1	0.030	0.085	0.034	0.076	$1.726 \cdot 10^{-5}$	$8.527 \cdot 10^{-5}$
0.2	0.065	0.169	0.074	0.151	$8.792 \cdot 10^{-5}$	$3.113 \cdot 10^{-4}$
0.3	0.112	0.252	0.126	0.232	$1.931 \cdot 10^{-4}$	$3.845 \cdot 10^{-4}$
0.4	0.191	0.354	0.198	0.322	$4.786 \cdot 10^{-5}$	$1.018 \cdot 10^{-3}$
0.5	0.277	0.456	0.291	0.421	$2.005 \cdot 10^{-4}$	$1.191 \cdot 10^{-3}$
0.6	0.395	0.575	0.407	0.531	$1.327 \cdot 10^{-4}$	$1.937 \cdot 10^{-3}$
0.7	0.551	0.691	0.543	0.648	$7.078 \cdot 10^{-5}$	$1.814 \cdot 10^{-3}$
0.8	0.704	0.784	0.693	0.768	$1.207 \cdot 10^{-4}$	$2.665 \cdot 10^{-4}$
0.9	0.869	0.904	0.849	0.887	$4.075 \cdot 10^{-4}$	$3.057 \cdot 10^{-4}$
					$\Phi_1 = 0.0013$	$\Phi_2 = 0.0073$

Tabla 5.1.14. Resultados parciales para el ejemplo del protocolo de problema inverso en el transitorio para una $v_{z,0,1} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$ y un error en las medidas del 3%

$v_{z,0,1} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$						
z/H	$T'_{i_{t_1, e=3\%}}$	$T'_{i_{t_2, e=3\%}}$	$T'_{i_{t_1=0.315 \text{ Ms}}}$	$T'_{i_{t_2=0.515 \text{ Ms}}}$	$\left(T'_{i_{t_1=0.315 \text{ Ms}}} - T'_{i_{t_1, e=3\%}}\right)^2$	$\left(T'_{i_{t_2=0.515 \text{ Ms}}} - T'_{i_{t_2, e=3\%}}\right)^2$
0.1	0.030	0.085	0.030	0.079	$2.376 \cdot 10^{-8}$	$3.887 \cdot 10^{-5}$
0.2	0.065	0.169	0.066	0.156	$1.895 \cdot 10^{-6}$	$1.599 \cdot 10^{-4}$
0.3	0.112	0.252	0.116	0.239	$1.517 \cdot 10^{-5}$	$1.590 \cdot 10^{-4}$
0.4	0.191	0.354	0.185	0.330	$3.699 \cdot 10^{-5}$	$5.714 \cdot 10^{-4}$
0.5	0.277	0.456	0.279	0.431	$4.665 \cdot 10^{-6}$	$6.008 \cdot 10^{-4}$
0.6	0.395	0.575	0.397	0.542	$2.303 \cdot 10^{-6}$	$1.090 \cdot 10^{-3}$
0.7	0.551	0.691	0.537	0.659	$2.077 \cdot 10^{-4}$	$9.976 \cdot 10^{-4}$
0.8	0.704	0.784	0.691	0.778	$1.686 \cdot 10^{-4}$	$4.001 \cdot 10^{-5}$
0.9	0.869	0.904	0.849	0.893	$4.075 \cdot 10^{-4}$	$1.319 \cdot 10^{-4}$
					$\Phi_1 = 0.0008$	$\Phi_2 = 0.0038$

Tabla 5.1.15. Resultados parciales para el ejemplo del protocolo de problema inverso en el transitorio para una $v_{z,0,1} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$ y un error en las medidas del 3%

Se ve claramente cómo, para una velocidad $v_{z,0,1} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$ (cinco veces inferior a la real) el funcional Φ_1 alcanza un valor bajo (0.002 y 0.0027 respectivamente).

5.1.3 Temperatura armónica en la superficie

Es aplicable en este apartado lo explicado en el caso del salto térmico en la superficie, si se trabaja con la temperatura media de la onda armónica. Nos centraremos, pues, en problemas inversos que usan la amplitud de la onda armónica a diferentes profundidades del medio poroso.

El caso de flujo nulo ($v_{z,0} = 0$)

Pueden plantearse dos problemas inversos, el de la estimación de la difusividad térmica en acuíferos térmicamente profundos y el de las estimaciones de la difusividad térmica y del espesor o profundidad en el caso de acuíferos (térmicamente) superficiales.

En el primero, se mide la desviación de temperaturas a una cierta profundidad ($\Delta T_{z_0, z_0}$), por del que se obtiene ($\Delta T'_{z_0, z_0}$) mediante la expresión $\Delta T'_{z_0} = \frac{\Delta T_{z_0}}{\Delta T_{z=0}}$. Entrando en la Curva Universal D (Figura 4.1.5), se lee la profundidad adimensional $\frac{z_0}{l_{z,0}^*}$ de la que se determina la longitud característica $l_{z,0}^*$. Con ella y la expresión (4.1.24) se puede estimar la difusividad térmica α .

En el caso de acuíferos superficiales (siempre desde el punto de vista térmico), si la profundidad total del acuífero H es conocida, a partir de una única medida ($\Delta T_{z_0, z_0}$) se obtiene el par ($\Delta T'_{z_0, z_0}$) que se introduce en el Ábaco Universal E (Figura 4.1.6) para determinar el valor del parámetro $\frac{H^2}{\alpha \tau_0}$ y de él estimar la difusividad térmica. Si no se conoce la profundidad H (algo infrecuente en acuíferos superficiales), se toman dos valores ($\Delta T_{z_1, z_1}$) y ($\Delta T_{z_2, z_2}$) a diferentes profundidades. Por iteración, se modifica H hasta que los pares ($\Delta T'_{z_1, \frac{z_1}{H}}$) y ($\Delta T'_{z_2, \frac{z_2}{H}}$) caigan dentro de la misma curva. Los valores estimados son el H final y la difusividad obtenida a partir del parámetro de la curva $\frac{H^2}{\alpha \tau_0}$.

Si se desconoce si el acuífero es profundo o superficial, se toman dos medidas temperatura-profundidad ($\Delta T_{z_1, z_1}$) y ($\Delta T_{z_2, z_2}$) y se comprueba mediante la Figura 4.1.5 si dan lugar a una misma longitud característica. Si es así, estamos frente a un acuífero profundo. En otro caso, se trata de un acuífero superficial. Después de ello se procede como se ha explicado anteriormente, dependiendo de la tipología.

El diagrama de bloques relativo a este caso particular ($v_{z,0} = 0$) se muestra en la Figura 5.1.4.

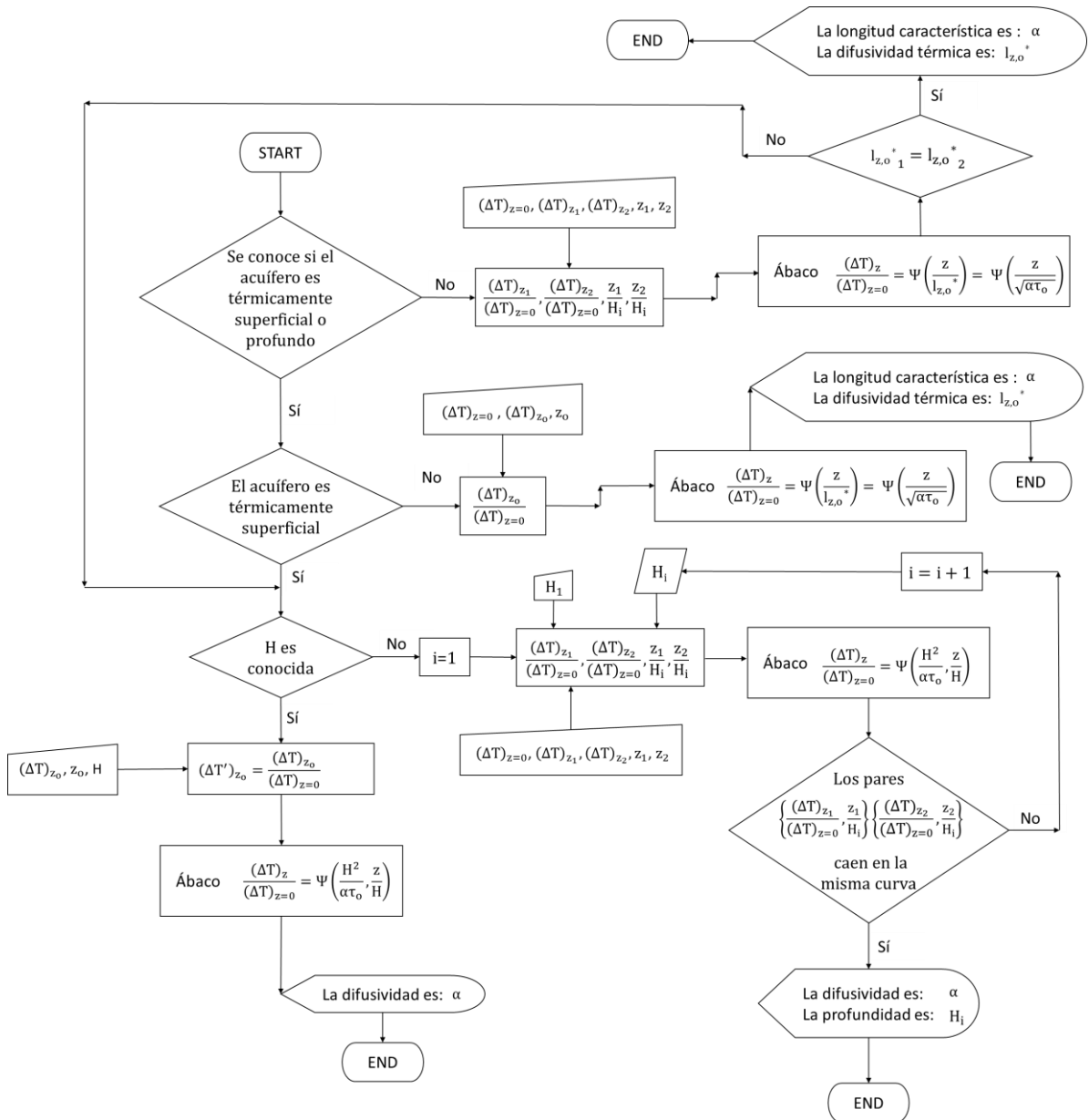


Figura 5.1.4. Protocolo de problema inverso (diagrama de bloques) para el caso de velocidad $v_{z,0} = 0$

El caso de flujo no nulo ($v_{z,0} \neq 0$)

El problema inverso permite dos vías de planteamiento: según se trabaje con temperaturas medias o con desviaciones de amplitud máxima. En el primer caso, se procede como se ha explicado para la condición de contorno de temperatura constante en la superficie del terreno, usando las Figuras 4.1.2, 4.1.3 y 4.1.4, o mediante el protocolo alternativo que aplica simulaciones numéricas. En el segundo, con independencia de si el flujo es ascendente o descendente, pueden establecerse dos protocolos diferentes según se trate de acuíferos profundos o superficiales.

En acuíferos profundos es suficiente hacer una medida $(\Delta T_{z_1, z_1})$ y, tras adimensionalizar ΔT_{z_1} , entrar con ella en la Curva Universal G que refleja la dependencia $\frac{(\Delta T)_z}{(\Delta T)_{z=0}} = \psi\left(\frac{z}{l_{z,0}^*}\right)$, Figura 4.1.8, para estimar la longitud característica $l_{z,0}^*$. Seguidamente, ir a la Curva Universal F (Figura 4.1.7) para determinar el monomio $\frac{\alpha}{\tau_0 v_{z,0}^2} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}}\right)^2$ que permite estimar la velocidad del flujo vertical $v_{z,0}$. Para asegurar que se trata de un acuífero profundo, introducir una segunda medida $(\Delta T_{z_2, z_2})$ y comprobar, usando la Curva Universal G, que se obtiene la misma longitud característica $l_{z,0}^*$.

En acuíferos superficiales, se elabora la tabla de medidas $\Delta T' - z'$ a partir de sus valores dimensionales $(\Delta T - z)$. Entrando en el Ábaco Universal H de la Figura 4.1.9, que representa la dependencia $\frac{(\Delta T)_z}{(\Delta T)_{z=0}} = \psi\left(\frac{z}{H}, \frac{H^2}{\alpha \tau_0}, \frac{\alpha}{\tau_0 v_{z,0}^2} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}}\right)^2\right)$, se elige la curva que mejor se ajusta a estos valores y se determinan los parámetros $\frac{H^2}{\alpha \tau_0}$ y $\frac{\alpha}{\tau_0 v_{z,0}^2} \left(\frac{\rho_e c_e}{\rho_{e,w} c_{e,w}}\right)^2$ de los cuales es inmediato estimar α y $v_{z,0}$. El resultado puede verificarse trabajando con los valores medios de temperatura que proporcionan el cociente $\frac{\alpha}{v_{z,0}}$.

En el caso particular de no conocer H, ni α ni $v_{z,0}$ (los calores específicos $\rho_e c_e$ y $\rho_{e,w} c_{e,w}$ sí son conocidos), el uso simultáneo de valores medios y desviaciones térmicas, permitiría plantear un problema inverso más complejo. Se asume, en primer lugar, un valor de H, y se estiman los valores de α y $v_{z,0}$ usando los perfiles de desviación térmica, comprobando que la terna $(H, \alpha, v_{z,0})$ satisface el valor del monomio $\frac{\alpha}{v_{z,0} H} \left(\frac{c_e \rho_e}{c_{e,w} \rho_{e,w}}\right)$ deducido a partir del problema inverso con valores medios de temperatura. Si no lo satisface, modificar el valor de H hasta que se consiga la convergencia de la terna $(H, \alpha, v_{z,0})$, reteniendo como solución los valores últimos.

Las Figuras 5.1.5 y 5.1.6 sintetizan, mediante sendos diagramas de bloques, los protocolos de los problemas inversos aplicables a acuíferos profundos y superficiales.

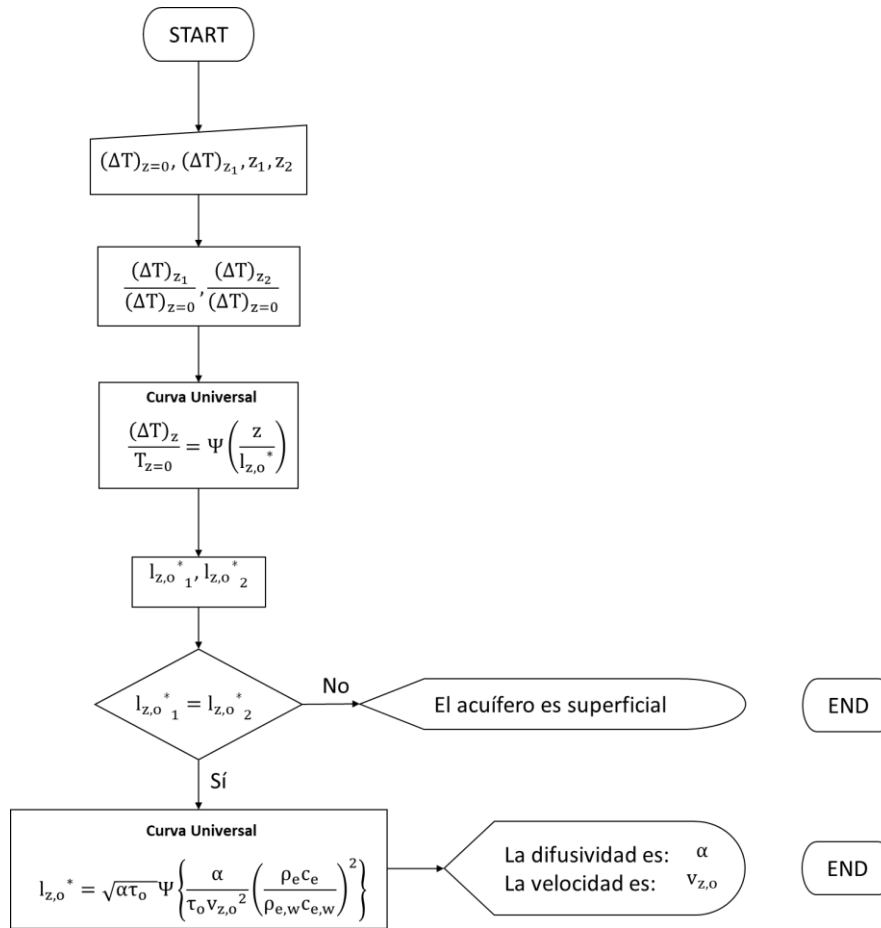


Figura 5.1.5. Protocolo $v_{z,0} \neq 0$ en acuíferos profundos

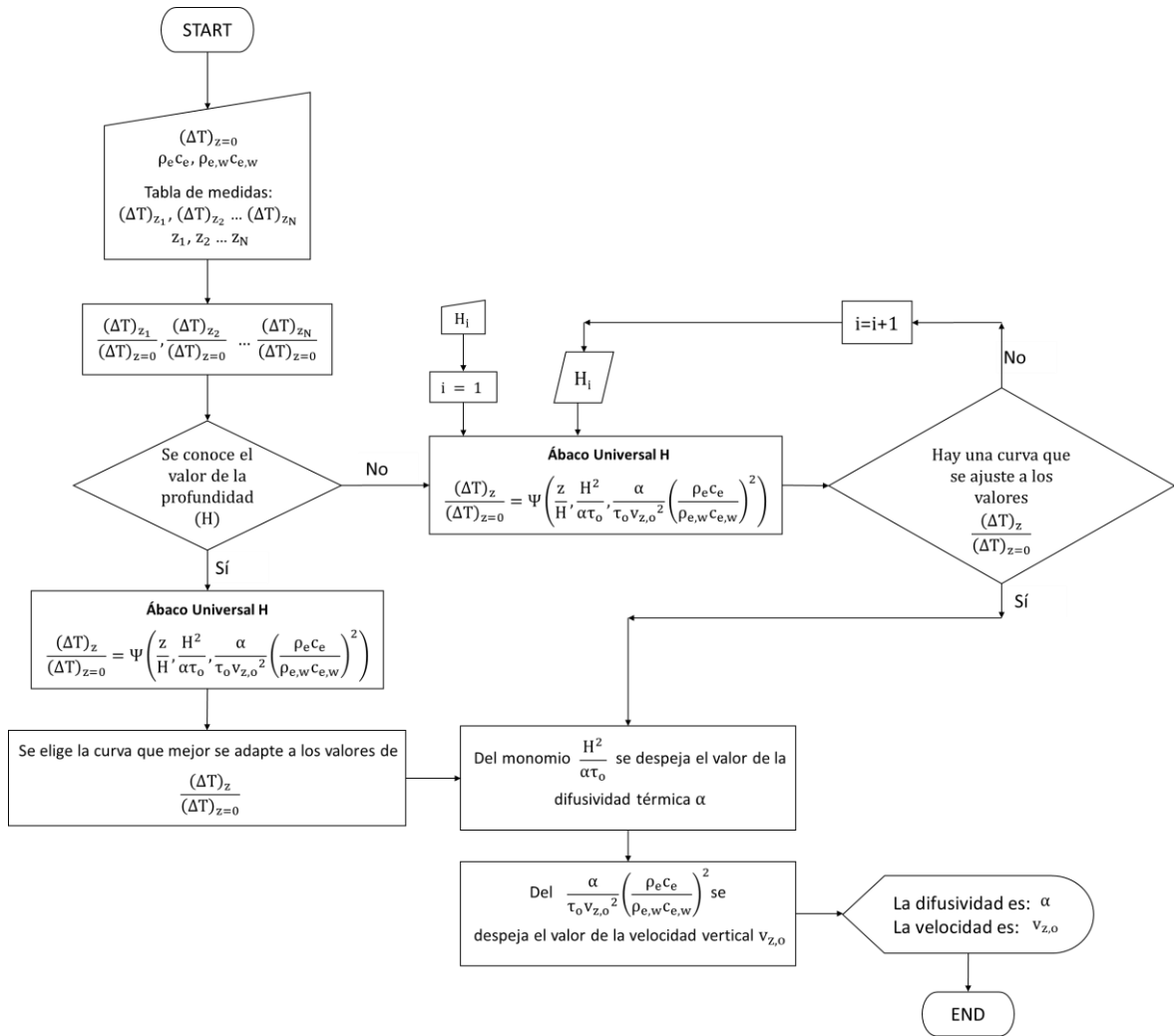


Figura 5.1.6. Protocolo $v_{z,0} \neq 0$ en acuíferos superficiales

5.2 Segunda aplicación. Flujo horizontal

5.2.1 Nomenclatura

e	error relativo aleatorio (%)
e_{v_{x,0},estimada}	error aleatorio (%) en la velocidad horizontal
N	número de medidas experimentales para el problema inverso
(T - y)_{x_{sim}}	perfil vertical de temperaturas simulado en la posición horizontal x
v_{x,0,1}, v_{x,0,2}	primera y segunda velocidad introducidas en el protocolo de problema inverso
v_{x,0,j}	velocidad del fluido en la iteración “j” introducida para la solución del problema inverso
v_{x,0,estimada}	velocidad horizontal estimada (m/s)
x_a, x_b	Posiciones horizontales dentro del intervalo [0, l _{x,v} *] (m)
x_{b,j}, x_{a,j}	Posiciones horizontales óptimas para la iteración j
x_{sim}	Posición horizontal simulada (m)
Δv_{x,0}	Incremento de velocidad utilizado en el protocolo de problema inverso

Δx_{sim}	Incremento de la posición horizontal en el protocolo de problema inverso
$\Psi_{b,x_{sim}}$	Función relativo al perfil de temperaturas en la posición x_b
$\Psi_{b,min,i}$	Valor mínimo del funcional en la iteración i
$\Psi_{b,min,j}$	Valor mínimo del funcional en la iteración j
$\Psi_{a,i}$	Funcional relativo a la posición $x_{a,i}$
$\Psi_{a,j}$	Funcional relativo a la posición $x_{a,j}$

Subíndices

$(\cdot)_{x_a, x_b}$	relativo a las posiciones horizontales x_a y x_b
$(\cdot)_{x_{a,j}, x_{b,j}}$	relativo a las posiciones horizontales x_a y x_b en la iteración j
$(\cdot)_{x_{sim,i}}$	relativo a la posición x_{sim} en la posición i

5.2.2 Desarrollo del problema inverso

Se propone un protocolo de problema inverso para estimar el valor de la velocidad horizontal del flujo de agua subterránea a partir de dos perfiles verticales de temperatura $T - y$ que llamaremos $(T - y)_{x_a}$ y $(T - y)_{x_b}$, siendo $x_a > x_b$. Cada perfil tiene N medidas a distintas profundidades y , en el ejemplo propuesto, estos perfiles se obtienen a partir de una simulación numérica (solución del problema directo) modificando la temperatura por aplicación de un error aleatorio. La profundidad del acuífero H y la difusividad térmica de la matriz agua-terreno α deben conocerse, así como las temperaturas en la superficie del terreno (T_1) y en el fondo del dominio (T_2). Para determinar el valor de la longitud característica, la temperatura del agua de entrada (T_3) en el borde izquierdo del acuífero no es necesario conocerla, siempre y cuando la difusividad horizontal sea despreciable en comparación con los efectos de la advección o arrastre. Por tanto, es necesario asegurarse de que los perfiles verticales de temperatura tomados en campo, están registrados en posiciones horizontales situadas más allá de la región en la cual los efectos de difusión y de advección son comparables entre sí.

El protocolo para la solución del problema inverso se resume en los siguientes pasos:

1) Simular numéricamente con los datos de entrada conocidos (T_1 , T_2 , H y α) un escenario, introduciendo una temperatura del borde de entrada T_3 aleatoria (por ejemplo la temperatura media entre T_1 y T_2). Se debe imponer una velocidad horizontal inicial para la primera simulación $v_{x,0,1}$, mayor a la esperada como real del escenario.

2) Los valores el perfil de temperaturas más cercano al borde izquierdo del dominio $(T - y)_{x_b}$ se comparan con los obtenidos tras la simulación en sucesivas posiciones horizontales, comenzando con los perfiles más cercanos a posiciones donde el perfil vertical es casi lineal. Se define el siguiente funcional:

$$\Psi_{b,x_{sim}} = \sum_{i=1}^{i=N} [(T - y)_{x_{b,i}} - (T - y)_{x_{sim,i}}]^2 \tag{5.2.1}$$

Donde $(T - y)_{x_{sim,i}}$ es el perfil vertical resultado de la simulación formado por N temperaturas correspondiente a la posición x . Una vez obtenido el funcional $\Psi_{b,x_{sim}}$, nuevos $\Psi_{b,x_{sim}}$ son evaluados para sucesivas posiciones $x_{sim} = x_{sim} - \Delta x_{sim}$ hasta alcanzar una posición x_{sim} en la cual el funcional es mínimo o alcanza un determinado valor. Los valores finales de la posición horizontal x_b y el funcional serán $x_{b,I}$ y $\Psi_{b,min,I}$.

3) Los valores del perfil más lejano al borde izquierdo del dominio, $(T - y)_{x_{a,i}}$, son comparados con los simulados en la posición $x_{a,I} = x_{b,I} + (x_a - x_b)$. Se calcula un nuevo funcional:

$$\Psi_{a,I} = \sum_1^N [(T - y)_{x_{a,i}} - (T - y)_{x_{a,I,i}}]^2 \quad (5.2.2)$$

Una vez finalizados los pasos anteriores relativos a la iteración $j = I$, se guardan los resultados parciales $v_{x,0,1}$, $x_{b,I}$, $x_{a,I}$, $\Psi_{b,min,I}$ y $\Psi_{a,I}$.

4) La velocidad horizontal $v_{x,0,1}$ es modificada disminuyendo su valor $\Delta v_{x,0}$ resultando una nueva velocidad $v_{x,0,2} = v_{x,0,1} - \Delta v_{x,0}$ con la cual se vuelve a simular el modelo otra vez. Los pasos 2 y 3 se vuelve a repetir (en este caso para $j = II$) obteniendo nuevos valores $x_{b,II}$, $x_{a,II}$, $\Psi_{b,min,II}$ y $\Psi_{a,II}$.

5) Si la suma $\Psi_{b,min,II} + \Psi_{a,II}$ es menor a $\Psi_{b,min,I} + \Psi_{a,I}$, volver al paso 4 (volviendo a su vez a los pasos 2 y 3 con una valor de $j = III$) para obtener $v_{x,0,3}$, $x_{b,III}$, $x_{a,III}$, $\Psi_{b,min,III}$ y $\Psi_{a,III}$. Continuar hasta la iteración $j+1$ en la cual $\Psi_{b,min,j+1} + \Psi_{a,j+1} > \Psi_{b,min,j} + \Psi_{a,j}$. La velocidad estimada será $v_{x,0,j+1} = v_{x,0,j} - \Delta v_{x,0,I}$.

6) Si $\Psi_{b,min,II} + \Psi_{a,II}$ es mayor a $\Psi_{b,min,II} + \Psi_{a,II}$, volver al paso 3, pero calculando la nueva velocidad horizontal de simulación $v_{x,0,2} = v_{x,0,1} + \Delta v_{x,0}$.

El diagrama de bloques relativo al protocolo de problema inverso para este problema aparece reflejado en la Figura 5.2.1

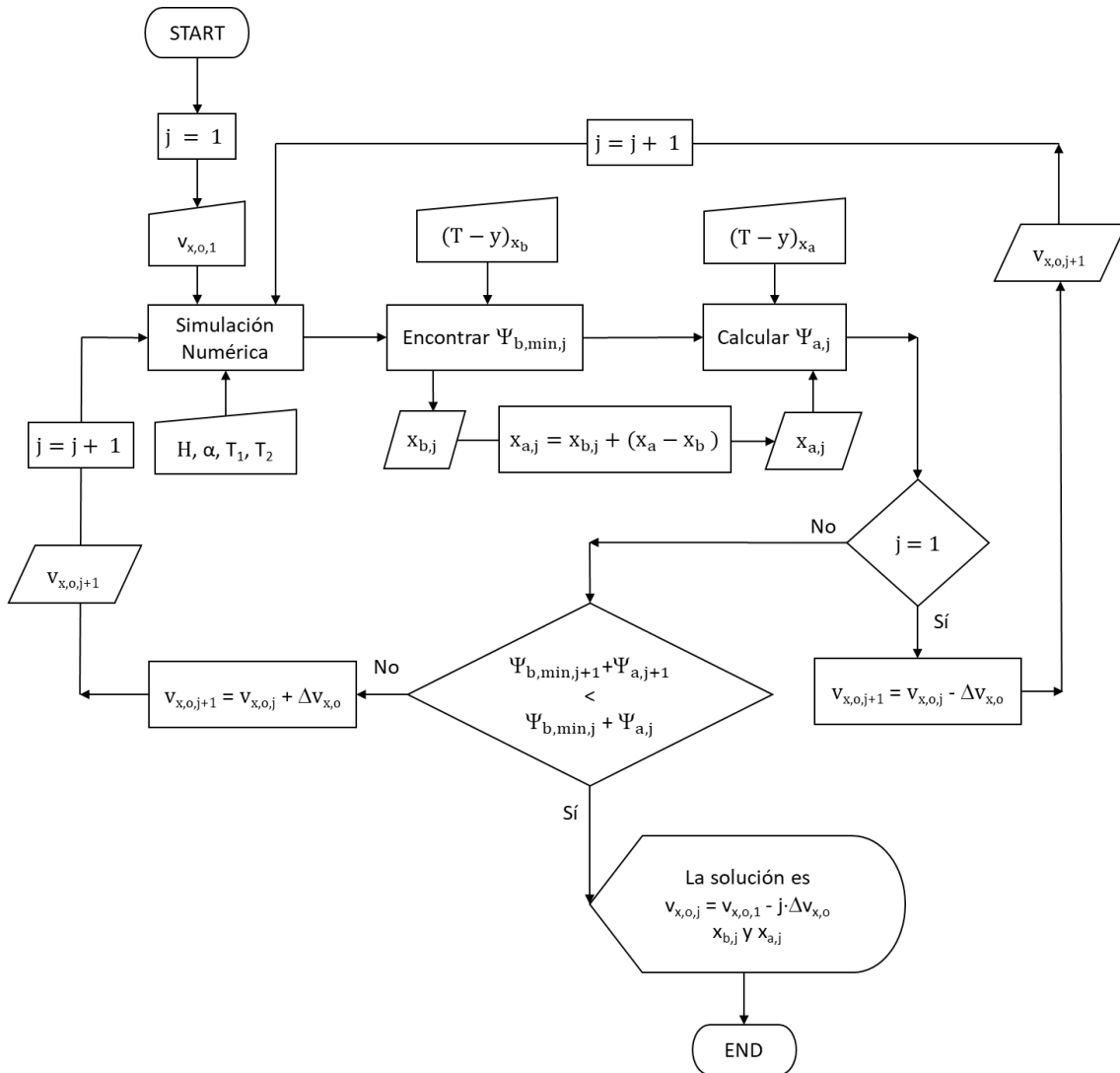


Figura 5.2.1. Protocolo de problema inverso para la estimación de la velocidad horizontal de flujo

5.2.3. Ejemplo de aplicación

Para asegurar la validez y la eficacia del protocolo anterior, seguidamente, se desarrolla un ejemplo. En primer lugar, se resuelve un problema directo (del cual conocemos todos los parámetros térmicos y geométricos, así como sus condiciones de contorno) para obtener la solución del campo de temperaturas en el terreno. Los perfiles verticales $(T - y)_{x_a}$ y $(T - y)_{x_b}$ situados en dos posiciones arbitrarias x_a y x_b , representados a partir de N medidas repartidas regularmente a lo largo de la profundidad total serán seleccionados. Para introducir desviaciones en éstas lecturas y así simular errores en las medidas (ya que los perfiles $(T - y)_{x_a}$ y $(T - y)_{x_b}$ representan a los perfiles que se registrarían en campo) se aplican errores aleatorios $e\%$.

Los datos de entrada para la resolución del problema inverso (propiedades térmicas, de flujo geometría y condiciones de contorno) se muestran en la Tablas 5.2.1 y 5.2.2.

H (m)	1
x_a (m)	3
x_b (m)	9
α (m ² /s)	10 ⁻⁷
v_{x,0} (m/s)	5·10 ⁻⁶
T₁ (°C)	0
T₂ (°C)	0.2
T₃ (°C)	1

Tabla 5.2.1 Parámetros del escenario

y		0.110	0.230	0.350	0.480	0.600	0.720	0.840	0.960
T_{x_a}	real	0.797	0.595	0.431	0.309	0.219	0.148	0.083	0.019
	e = 1%	0.798	0.597	0.434	0.308	0.221	0.149	0.083	0.019
	e = 2%	0.790	0.583	0.425	0.306	0.222	0.151	0.083	0.019
T_{x_b}	real	0.868	0.725	0.588	0.459	0.340	0.230	0.128	0.029
	e = 1%	0.876	0.729	0.583	0.458	0.342	0.232	0.128	0.029
	e = 2%	0.863	0.719	0.590	0.454	0.346	0.228	0.128	0.029

Tabla 5.2.2. Datos de entrada (perfiles de temperatura) en las posiciones x_a y x_b para la aplicación del protocolo de problema inverso

Los errores aleatorios aplicados son del 1 y 2% y el número de medidas repartidas regularmente en profundidad es de 8. Para la simulación numérica se ha tomado una malla de 41 celdas (horizontales) y de 100 celdas (verticales). El tiempo de simulación para cada iteración es de aproximadamente 50 segundos. Los resultados parciales para una velocidad de $v_{x,0,1} = 2 \cdot 10^{-6}$ m/s y un valor de $\Delta v_{x,0} = 0.1 \cdot 10^{-6}$ m/s aparecen reflejados en la Tablas 5.2.3 y 5.2.4.

$v_{x,o,i}$ (m/s)	$e = 1\%$				
	$\Psi_{b,min,j}$	$\Psi_{a,j}$	$\Psi_{b,min,j} + \Psi_{a,j}$	$x_{a,j}$ (m)	$x_{b,j}$ (m)
$2.0 \cdot 10^{-6}$	0.0244	0.1059	0.1303	1.2	7.2
$4.0 \cdot 10^{-6}$	0.0066	0.0327	0.0939	2.4	8.4
$4.5 \cdot 10^{-6}$	0.0148	0.0156	0.0304	2.6	8.6
$4.9 \cdot 10^{-6}$	0.0047	0.0110	0.0157	3.0	9.0
$5.1 \cdot 10^{-6}$	0.0091	0.0127	0.0217	3.0	9.0

Tabla 5.2.3. Resultados parciales y final para un error aleatorio en los perfiles de entrada del 1%

$v_{x,o,i}$ (m/s)	$e = 2\%$				
	$\Psi_{b,min,j}$	$\Psi_{a,j}$	$\Psi_{b,min,j} + \Psi_{a,j}$	$x_{a,j}$ (m)	$x_{b,j}$ (m)
$2.0 \cdot 10^{-6}$	0.0084	0.1106	0.1190	1.2	7.2
$4.0 \cdot 10^{-6}$	0.0129	0.0374	0.0502	2.4	8.4
$4.5 \cdot 10^{-6}$	0.0088	0.0196	0.0284	2.6	8.6
$4.9 \cdot 10^{-6}$	0.0209	0.0134	0.0344	3.0	9.0
$5.1 \cdot 10^{-6}$	0.0120	0.0115	0.0235	3.0	9.0

Tabla 5.2.4. Resultados parciales y final para un error aleatorio en los perfiles de entrada del 2%

No existe una correlación directa entre el funcional asociado a cada error en las medidas, aunque los funcionales decrecen monótonamente a medida que se acerca al valor de la velocidad final estimada, lo que ocurre para ambos errores aleatorios. Se puede afirmar que el valor final estimado para la velocidad en ambos casos verifica la eficiencia y la precisión del protocolo propuesto. Estas estimaciones con errores, suficientemente pequeños para estos problemas en el campo de la ingeniería, son de:

$$v_{x,o,estimada} = 4.9 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}, \quad e_{v_{x,o,estimado}} = 2\% \quad \text{para } e = 1\%$$

$$v_{x,o,estimada} = 5.1 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}, \quad e_{v_{x,o,estimado}} = 2\% \quad \text{para } e = 2\%$$

5.3 Tercera aplicación. Flujo horizontal con capa permeable sumergida

5.3.1. Nomenclatura

d	$x_2 - x_1$ (m)
$T_{\text{est}, \frac{H}{2} \gg l_x^*}$	temperatura en el estacionario en la posición $H/2$ en una posición horizontal $x > l_x^*$ ($^{\circ}\text{C}$)
$T_{0,i}$	Temperatura en el borde de entrada de agua en la iteración i ($^{\circ}\text{C}$)
$T_{x_1, \frac{H}{4}}$	temperatura registrada en la posición x_1 a una profundidad $H/4$ ($^{\circ}\text{C}$)
$T_{x_2, \frac{H}{4}}$	temperatura registrada en la posición x_2 a una profundidad $H/4$ ($^{\circ}\text{C}$)
$T_{x_1, \frac{H}{2}}$	temperatura registrada en la posición x_1 a una profundidad $H/2$ ($^{\circ}\text{C}$)
$T_{x_2, \frac{H}{2}}$	temperatura registrada en la posición x_2 a una profundidad $H/2$ ($^{\circ}\text{C}$)
x_1	posición horizontal más cercana al borde izquierdo del dominio donde se hacen mediciones de temperatura (m)
x_2	posición horizontal más cercana al borde derecho del dominio donde se hacen mediciones de temperatura (m)

Superíndices

$(\cdot)'$ denota carácter adimensional

5.3.2. Descripción del protocolo

Los diferentes protocolos de problema inverso que se van a presentar en este apartado hace uso de los ábacos universales obtenidos en el Capítulo 4 (apartado 4.3). El tipo de problema inverso dependerá de los datos de entrada disponibles: geometría, propiedades físicas, temperaturas en los contornos y/o perfiles de temperatura obtenidos experimentalmente.

Si se conoce que en el escenario se ha alcanzado el estado estacionario, se puede realizar la estimación simultánea de la longitud característica horizontal (l_x^*), de la velocidad horizontal en el canal (v_0) y de la temperatura del agua de entrada en la frontera izquierda de la capa permeable (T_0). Para ello, se debe disponer de los siguientes datos:

- Calores específicos y conductividades térmicas de las capas I y II
- Temperaturas en la superficie del terreno y en el fondo del dominio (T_1 y T_2) y profundidades (espesores) de las capas I y II (l_1 y l_2)
- Dos temperaturas registradas en dos posiciones diferentes a una profundidad $\frac{H}{4}$, ($T_{x_1, \frac{H}{4}}$ y $T_{x_2, \frac{H}{4}}$) y dos temperaturas registradas en las mismas posiciones pero a una profundidad $\frac{H}{2}$, ($T_{x_1, \frac{H}{2}}$ y $T_{x_2, \frac{H}{2}}$). La distancia horizontal entre las dos medidas es conocida ($d = x_2 - x_1$). Sin embargo, los valores absolutos de las posiciones (x_1 y x_2) no son conocidos.

Los pasos a seguir en el protocolo, son los siguientes:

1) Asumir un valor inicial de la temperatura del agua de entrada en el borde izquierdo de la capa permeable ($T_{0,1}$) y determinar por interpolación lineal la temperatura en el estacionario en la posición $\frac{H}{2}$ en una posición horizontal $x > l_x^*$ utilizando la siguiente expresión

$$\text{matemática: } T_{\text{est}, \frac{H}{2} \gg l_x^*} = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l_1 + l_2} \frac{H}{2}$$

2) Adimensionalizar los valores $T_{x_1, \frac{H}{2}}$ y $T_{x_2, \frac{H}{2}}$ utilizando las siguientes expresiones: $T'_{x_1, \frac{H}{2}} =$

$$\frac{T_{x_1, \frac{H}{2}} - T_{\text{est}, \frac{H}{2} \gg l_x^*}}{T_0 - T_{\text{est}, \frac{H}{2} \gg l_x^*}} \text{ y } T'_{x_2, \frac{H}{2}} = \frac{T_{x_2, \frac{H}{2}} - T_{\text{est}, \frac{H}{2} \gg l_x^*}}{T_0 - T_{\text{est}, \frac{H}{2} \gg l_x^*}}.$$

3) Entrar con las temperaturas adimensionales $T'_{x_1, \frac{H}{2}}$ y $T'_{x_2, \frac{H}{2}}$ en el ábaco de la temperatura adimensional en el estacionario y, conociendo el cociente $\frac{l_1}{l_2}$, obtener los valores x_1' y x_2' .

4) Despejar la longitud característica l_x^* (para el valor inicialmente escogido de la temperatura $T_{0,1}$) de la ecuación $\frac{x_2 - x_1}{l_x^*} = x_2' - x_1'$.

5) Determinar las temperaturas $T_{\text{est}, \frac{H}{4} \gg l_x^*} = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{l_1 + l_2} \frac{H}{4}$, $T'_{x_1, \frac{H}{4}} = \frac{T_{x_1, \frac{H}{4}} - T_{\text{est}, \frac{H}{4} \gg l_x^*}}{T_0 - T_{\text{est}, \frac{H}{4} \gg l_x^*}}$ y

$$T'_{x_2, \frac{H}{4}} = \frac{T_{x_2, \frac{H}{4}} - T_{\text{est}, \frac{H}{4} \gg l_x^*}}{T_0 - T_{\text{est}, \frac{H}{4} \gg l_x^*}}.$$

6) Repetir los pasos 3 y 4, pero con las temperaturas $T'_{x_1, \frac{H}{4}}$ y $T'_{x_2, \frac{H}{4}}$.

7) Si las longitudes características para los pares de valores de temperaturas ($T'_{x_1, \frac{H}{2}}$, $T'_{x_2, \frac{H}{2}}$) y ($T'_{x_1, \frac{H}{4}}$, $T'_{x_2, \frac{H}{4}}$) son diferentes, modificar el valor de T_0 de manera conveniente hasta que los cocientes entre longitudes características obtenidas se aproximen a un valor cercano a la unidad. Retener el valor final de las longitudes características para las profundidades $\frac{H}{4}$ y $\frac{H}{2}$.

8) Obtener a partir del Ábaco Universal 2 la velocidad horizontal v_0 , haciendo uso de la longitud característica media obtenida en el paso 7 y del parámetro de curva $\frac{l_1}{l_2}$.

Las soluciones del problema inverso serán las estimaciones finales de T_0 , v_0 y l_x^* .

En este tipo de problemas lo más frecuente es no haber alcanzado el estado estacionario debido a que, por ejemplo, para una difusividad térmica de $\alpha = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ y un valor de $l_2 = 30 \text{ m}$, el tiempo característico (que puede estimarse de forma aproximada a través de la expresión $\tau^* \approx \frac{l_2^2}{\alpha}$) es de aproximadamente 29 años, un tiempo considerablemente grande aunque no a escala

geológica. El Diagrama de bloques relativo al protocolo de problema inverso para el estado estacionario aparece reflejado en la Figura 5.3.1.

Para el período transitorio, el protocolo de problema inverso es el siguiente:

1) Seguir los pasos 1 a 7 del protocolo para el caso estacionario para verificar, gracias a la no convergencia de las estimaciones, que estamos ante un caso transitorio.

2) Ejecutar los pasos del caso transitorio pero con el conjunto de ábacos correspondientes a un tiempo adimensional inferior a la unidad (por ejemplo, para $t' = \frac{t}{\tau^*} = 0.5$) y comprobar que la convergencia es posible. Si no es así, trabajar con el conjunto de ábacos correspondientes a un tiempo adimensional menor (por ejemplo, los relativos a $t' = \frac{t}{\tau^*} = 0.25$). Continuar de la misma forma hasta logara la convergencia de las estimaciones.

Con el objetivo de ilustrar la aplicación de éstos protocolos, se presenta un ejemplo de aplicación en el estado estacionario. Se comenzará con la resolución de un problema directo para obtener, tras la simulación numérica del mismo, el campo estacionario de temperaturas en el dominio que será asumido como solución exacta. Seguidamente se afecta a ese campo de temperaturas con un error aleatorio y se procede a la aplicación de los pasos del protocolo.

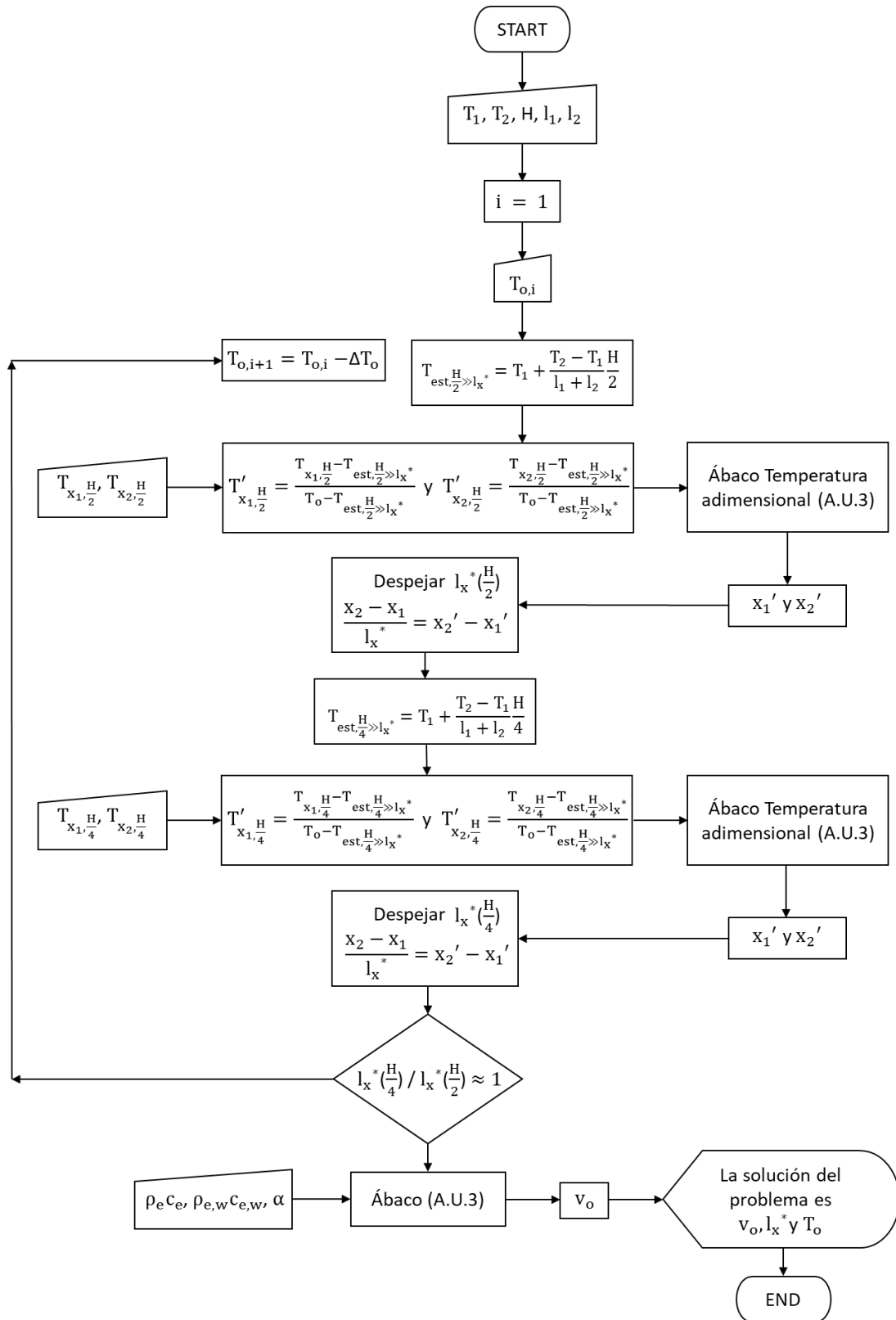


Figura 5.3.1. Protocolo de problema inverso para la estimación de la velocidad horizontal de flujo y de la temperatura de entrada de la capa permeable, así como de la longitud característica

5.3.3. Ejemplo de aplicación

Los datos de entrada aparecen reflejados en la Tabla 5.3.1. Las temperaturas estacionarias resultantes de la simulación numérica situadas a una posición horizontal de $x_1 = 8.25$ m y $x_2 = 16.25$ m y a profundidades de $\frac{H}{4}$ y $\frac{H}{2}$ (m), así como sus valores afectados por un error aleatorio del 1% se muestran en la Tabla 5.3.2.

Parámetro	Valor
l_1 (m)	5.0
l_2 (m)	5.0
T_1 (°C)	1.0
T_2 (°C)	2.0
T_0 (°C)	0.0
v_0 (m/s)	$5 \cdot 10^{-6}$
l_x^* (m)	21.5
k_x (cal/(sm°C))	1.0
k_y (cal/(sm°C))	1.0
$\rho_e c_e$ (cal/(m ³ °C))	10^6
$\rho_{e,w} c_{e,w}$ (cal/(m ³ °C))	10^6

Tabla 5.3.1. Parámetros y propiedades térmicas y geométricas del problema directo

T (°C)	Valor	T (°C) afectada error 1%
$T_{x_1, \frac{H}{4}}$ (°C)	1.0201	1.0199
$T_{x_2, \frac{H}{4}}$ (°C)	1.1701	1.1760
$T_{x_1, \frac{H}{2}}$ (°C)	1.0644	1.0617
$T_{x_2, \frac{H}{2}}$ (°C)	1.3489	1.3612

Tabla 5.3.2. Temperaturas estacionarias situadas a una posición horizontal de $x_1 = 8.25$ m y $x_2 = 16.25$ m y a profundidades de $\frac{H}{4}$ y $\frac{H}{2}$ (m), así como sus valores afectados por un error aleatorio del 1%

Comenzaremos trabajando con el conjunto de ábacos relativo a la temperatura adimensional en el estado estacionario con un valor inicial $T_{0,1} = 1$ °C. Para entrar en los ábacos relativos a la temperatura adimensional en el estado estacionario, es necesario determinar las temperaturas adimensionales que aparecen reflejadas en los pasos 2, 3, 4 y 5 del protocolo. De esta forma, para cada profundidad relativa, se obtendrá una longitud característica. El valor de $T_{0,1}$ debe ir modificándose hasta que el cociente entre longitud características sea cercano a la unidad.

Para el primer valor de $T_{0,1}$ y, para una profundidad relativa $\frac{H}{2}$, se obtiene un par de valores $x_{1, \frac{H}{2}}'$ y $x_{2, \frac{H}{2}}'$. La Tabla 5.3.3 muestra los resultados parciales (para el valor de la temperatura a la entrada de la capa permeable) de las simulaciones numéricas llevadas a cabo hasta alcanzar la convergencia.

T (°C)	$T_{0,1} = 1$	$T_{0,2} = 0.5$	$T_{0,3} = 0.1$	$T_{0,4} = 0.01$
$T'_{x_{1, \frac{H}{4}}}$ (°C)	0,9205	0,3068	0,2001	0,1856
$T'_{x_{2, \frac{H}{4}}}$ (°C)	0,2959	0,0986	0,0643	0,0597
$T'_{x_{1, \frac{H}{2}}}$ (°C)	0,8766	0,4383	0,3131	0,2942
$T'_{x_{2, \frac{H}{2}}}$ (°C)	0,2776	0,1388	0,0992	0,0932
$x'_{1, \frac{H}{4}}$	-	0,198	0,3550	0,3800
$x'_{2, \frac{H}{4}}$	-	0,6025	0,7550	0,7660
$x'_{1, \frac{H}{2}}$	0,0235	0,245	0,3575	0,3900
$x'_{2, \frac{H}{2}}$	0,4000	0,642	0,7550	0,7750
$x'_{2, \frac{H}{4}} - x'_{1, \frac{H}{4}}$	-	0,4045	0,4000	0,3860
$x'_{2, \frac{H}{2}} - x'_{1, \frac{H}{2}}$	0,3765	0,3970	0,3975	0,3850
$l_{x, \frac{H}{4}}^*$ (m)	-	19,7775	20,0000	20,7254
$l_{x, \frac{H}{2}}^*$ (m)	21,2483	20,1511	20,1258	20,7792
$l_{x, \frac{H}{4}}^* / l_{x, \frac{H}{2}}^*$	-	0,9815	0,9938	0,9974

Tabla 5.3.3. Resultados parciales (para valores de T_0) de las simulaciones numéricas llevadas a cabo hasta alcanzar la convergencia

Por tanto, con un valor de la longitud característica $l_x^* = 20.75$ m, se puede entrar en el ábaco de la Figura 4.3.2 y obtener un valor para el grupo adimensional $\frac{\rho_{e,w} c_{e,w} v_0 l_1}{\rho_e c_e \alpha} = 23.8$, a partir del cual se obtiene una velocidad horizontal en la capa permeable $v_0 = 4.76 \cdot 10^{-6}$ m/s. Las desviaciones relativas resultantes de estas estimaciones son suficientemente pequeñas para el error aleatorio del 1% introducido en la temperatura de entrada. Estos son: 3,6% y 5% para la longitud y velocidad características, respectivamente.

5.4 Cuarta aplicación. Flujo oblicuo

Para el problema con componentes horizontal y vertical de la velocidad constantes, habiendo sido alcanzado el estado estacionario, se proponen dos protocolos de problema inverso para determinar el valor de cada una de las componentes del flujo. Los correspondientes diagramas de bloques que organizan la cadencia de la aplicación de los mismos, se muestran en las Figuras 5.4.1 y 5.4.2. El primer protocolo requiere simulaciones numéricas para la determinación de la componente horizontal de la velocidad mientras que, en el segundo, se aplican las curvas universales obtenidas en el apartado 4.4.

5.4.1 Nomenclatura

N	número de medidas de temperatura, a distintas profundidades, en cada uno de los perfiles verticales
$(T - y)_{x_a}$	perfil vertical de temperatura registrado en la posición x_a , dentro de la longitud característica
$(T - y)_{x_b}$	perfil vertical de temperatura registrado en la posición x_b , dentro de la longitud característica
$(T_i - y_i)_{x_0, 1 < i < N}$	perfil vertical de temperaturas tabuladas registrado en la posición x_0 , más allá de la longitud característica
$(T_i - y_i)_{1 < i < N, \text{problema directo}}$	tabla de temperaturas resultado del problema directo para la estimación de la componente vertical de la velocidad
$(T - y)_{x_{sim,i}}$	perfil de temperaturas simuladas en la posición x_{sim}
$v_{x,j}$	velocidad horizontal impuesta para la simulación j
x_a	posición horizontal situada dentro de la longitud característica
x_b	posición horizontal situada dentro de la longitud característica, siendo $x_a > x_b$
$x_{a,j}$	posición x_a obtenida en la simulación j
$x_{b,j}$	posición x_b obtenida en la simulación j
x_0	posición horizontal situada más allá de la longitud característica
x_{sim}	posición x de la simulación
z_i	Profundidad i (m)
Δv_x	incremento de la velocidad horizontal para las nuevas simulaciones
$\Delta v_{y,1}$	incrementos de la velocidad vertical para las nuevas simulaciones
Δx_{sim}	incremento de x_{sim}
Φ	funcional para la determinación de la componente vertical de la velocidad
$\Psi_{b,x_{sim}}$	funcional relativo a la posición x_b
$\Psi_{a,j}$	funcional relativo a la posición x_a

Superíndices

$(\cdot)'$ denota carácter adimensional

Subíndices

$(\cdot)_{e=1\%}$ denota error del 1%

$(\cdot)_{e=3\%}$	denota error del 3%
$(\cdot)_{est}$	referente al estado estacionario
$(\cdot)_{\frac{H}{2}}$	referente a la profundidad $H/2$
$(\cdot)_{0 < i < N}$	relativo al perfil vertical con un número N de medidas
$(\cdot)_{problema\ directo}$	relativo al problema directo
$(\cdot)_{x_a}$	relativo a la posición x_a
$(\cdot)_{x_b}$	relativo a la posición x_b
$(\cdot)_{x_o}$	relativo a la posición x_o

5.4.2 Primer protocolo

Los datos de partida son las propiedades térmicas del terreno, la profundidad H del acuífero, las temperaturas en la superficie del terreno (T_1) y en el fondo del dominio (T_2) y tres perfiles verticales de temperatura $T - y$, que llamaremos $(T - y)_{x_a}$, $(T - y)_{x_b}$ y $(T_i - y_i)_{x_o, 1 < i < N}$, con $x_a > x_b$ y $x_o > x_a$. Los perfiles $(T - y)_{x_a}$ y $(T - y)_{x_b}$ se encuentra dentro de la región delimitada por la longitud característica horizontal mientras que el perfil $(T - y)_{x_o}$ está ubicado en una posición horizontal mayor a la longitud característica, por lo que sólo se verá afectado por la componente vertical de flujo. Cada uno de los tres perfiles tiene N medidas a distintas profundidades. Los pasos de los que consta el protocolo son:

1) El perfil vertical tabulado de temperaturas situado más allá de la longitud característica se denominará $(T_i - y_i)_{x_o, 1 < i < N}$, siendo N el número de medidas en el sondeo. Este perfil se escribe en forma universal y adimensional usando la expresión $T' = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$, con T_1 y T_2 las temperaturas en la superficie del terreno y en la frontera inferior del dominio.

2) Representando los puntos del perfil $(T_i - y_i)_{x_o, 1 < i < N}$ en el ábaco de la Figura 4.1.2 (ver Capítulo 4), es posible hacer una estimación gráfica bastante aproximada del valor del grupo adimensional $\frac{\alpha}{v_y H} \left(\frac{c_e \rho_e}{c_{e,w} \rho_{e,w}} \right)$, a partir del cual puede estimarse la componente vertical de la velocidad, v_y .

3) La componente horizontal de la velocidad, obtenida en el paso anterior, pasará a denominarse v_y . Juntos con los datos de las propiedades térmicas del subsuelo, se resuelve el problema directo mediante una simulación numérica, obteniéndose la tabla de temperaturas $(T_i - y_i)_{1 < i < N, problema\ directo}$ que, traducida a su forma adimensional, sería $(T'_i - y'_i)_{problema\ directo, x_o, 1 < i < N}$

4) Se calcula el siguiente funcional:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N [(T_i - y_i)_{x_o, 1 < i < N} - (T'_i - y'_i)_{problema\ directo, 1 < i < N}]^2 \quad (5.4.1)$$

5) Modificando sucesivamente la velocidad a nuevos valores, por ejemplo $v_y + \Delta v_{y,1}$, $v_{y,1} + 2\Delta v_{y,1}$, $v_{y,1} + 3\Delta v_{y,1}$..., se van obteniendo los funcionales de las sucesivas simulaciones hasta que su valor sea suficientemente pequeño, obteniéndose el valor de la componente vertical del flujo de agua v_y .

6) Simular numéricamente un escenario con los datos de entrada conocidos (T_1 , T_2 , H , α y v_y). Se debe imponer un valor inicial de la componente horizontal de la velocidad para la primera simulación $v_{x,I}$, que sea mayor que el esperado.

7) Los valores el perfil vertical de temperaturas más cercano al borde izquierdo del dominio $(T - y)_{x_b}$ se comparan con los obtenidos tras la simulación en sucesivas posiciones horizontales, comenzando con los perfiles más cercanos a posiciones donde el perfil vertical es casi lineal, definiendo el siguiente funcional:

$$\Psi_{b,x_{sim}} = \sum_{i=1}^{i=N} [(T - y)_{x_{b,i}} - (T - y)_{x_{sim,i}}]^2 \quad (5.4.2)$$

donde $(T - y)_{x_{sim,i}}$ es el perfil vertical resultado de la simulación formado por N temperaturas correspondiente a la posición x. Una vez obtenido el funcional $\Psi_{b,x_{sim}}$, se determinan nuevos valores del mismo para sucesivas posiciones $x_{sim} = x_{sim} - \Delta x_{sim}$ hasta alcanzar una posición x_{sim} en la cual el funcional es mínimo, o alcanza un determinado valor suficientemente pequeño. Se anotan los valores finales de posición horizontal y funcional $x_{b,I}$ y $\Psi_{b,min,I}$.

8) Los valores del perfil más alejado del borde izquierdo del dominio, pero dentro de la longitud característica horizontal $(T - y)_{x_a,i}$, son comparados con los simulados en la posición $x_{a,I} = x_{b,I} + (x_a - x_b)$, calculando un nuevo funcional:

$$\Psi_{a,I} = \sum_{i=1}^N [(T - y)_{x_{a,i}} - (T - y)_{x_{a,i}}]^2 \quad (5.4.3)$$

Finalizados los pasos anteriores relativos a la iteración $j = I$, se guardan los resultados parciales $v_{x,I}$, $x_{b,I}$, $x_{a,I}$, $\Psi_{b,min,I}$ y $\Psi_{a,I}$.

9) La componente horizontal de la velocidad $v_{x,I}$ es modificada disminuyendo su valor $\Delta v_{x,I}$, resultando una nueva velocidad $v_{x,II} = v_{x,I} - \Delta v_{x,I}$ con la cual se vuelve a simular el modelo otra vez. Los pasos 7 y 8 se vuelve a repetir (en este caso para $j = II$) obteniendo nuevos valores $x_{b,II}$, $x_{a,II}$, $\Psi_{b,min,II}$ y $\Psi_{a,II}$.

10) Si la suma $\Psi_{b,min,II} + \Psi_{a,II}$ es menor a $\Psi_{b,min,I} + \Psi_{a,I}$, volver al paso 9 (retomando a su vez a los pasos 7 y 8 con una valor de $j = III$) para obtener $v_{x,III}$, $x_{b,III}$, $x_{a,III}$, $\Psi_{b,min,III}$ y $\Psi_{a,III}$.

Continuar hasta la iteración $j + 1$ en la cual $\Psi_{b,\min,j+1} + \Psi_{a,j+1} > \Psi_{b,\min,j} + \Psi_{a,j}$. La velocidad estimada será $v_{x,j+1} = v_{x,j} - \Delta v_{x,I}$.

11) Si $\Psi_{b,\min,II} + \Psi_{a,II}$ es mayor a $\Psi_{b,\min,II} + \Psi_{a,II}$, volver al paso 8, pero calculando la nueva velocidad horizontal de simulación $v_{x,II} = v_{x,I} + \Delta v_{x,I}$.

Véase Figuras 5.4.1 y 5.4.2.

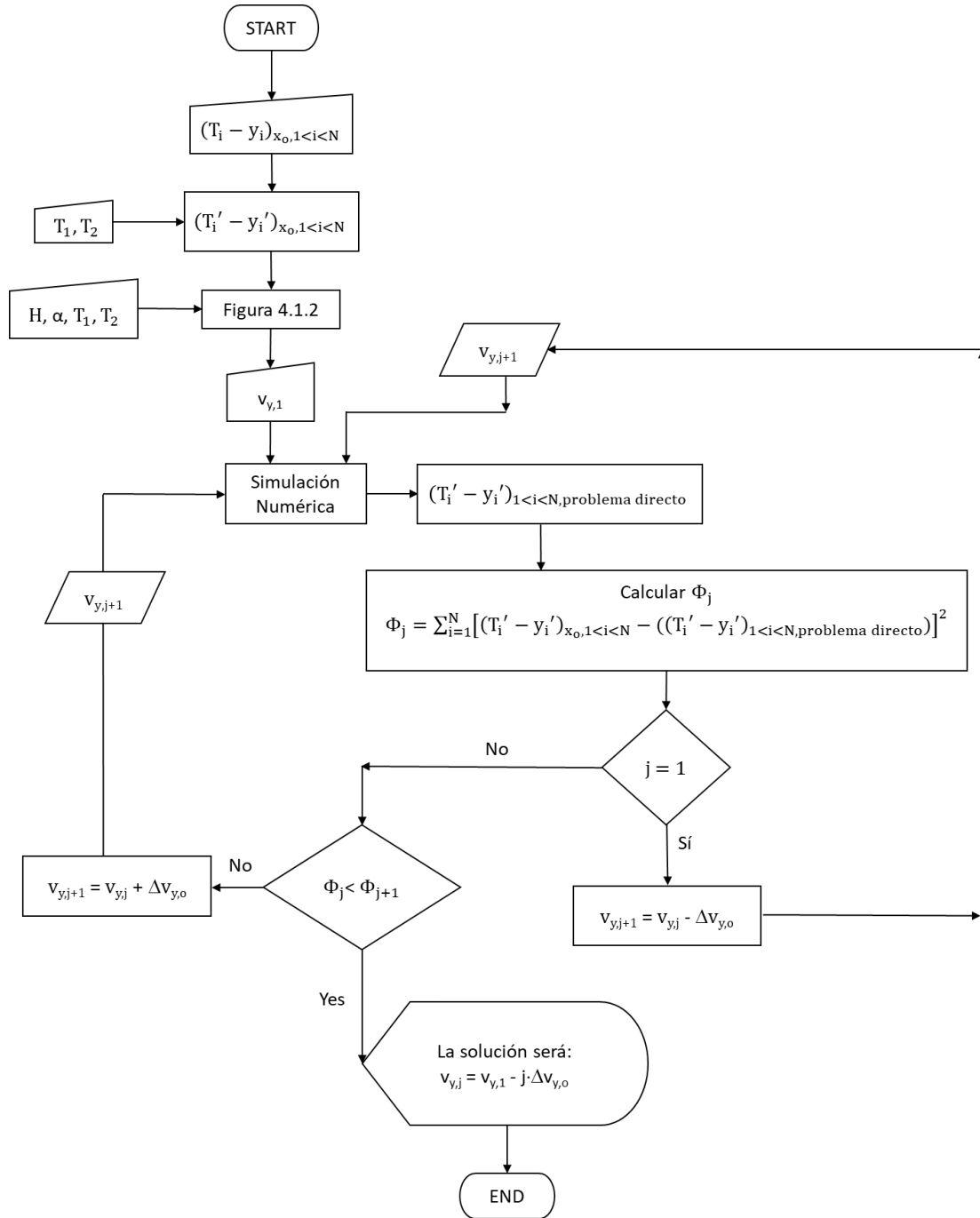


Figura 5.4.1. Diagrama de bloques de los pasos 1, 2, 3, 4 y 5 del protocolo de problema inverso para el problema de flujo oblicuo con velocidad constante en todo el dominio

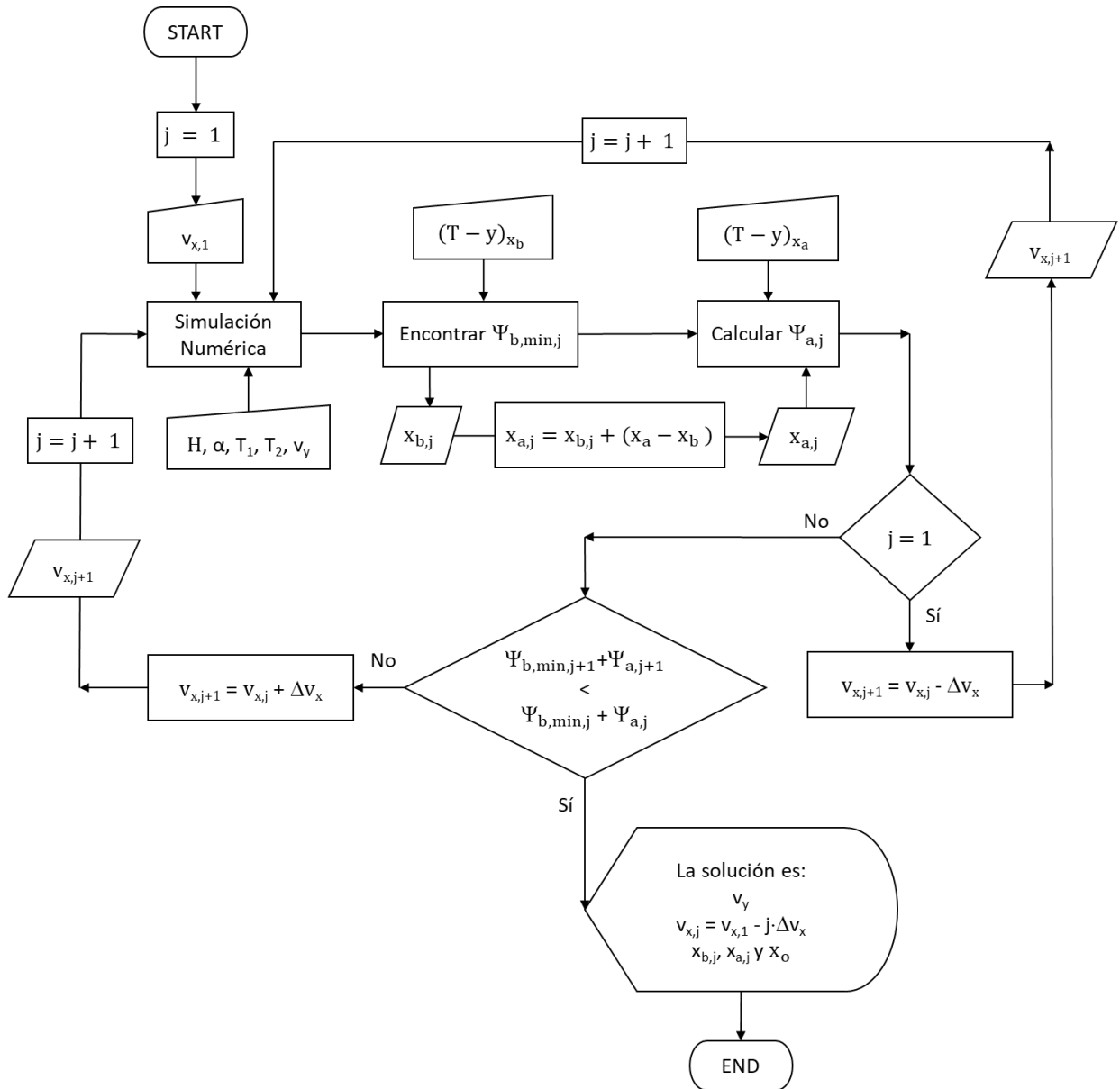


Figura 5.4.2. Diagrama de bloques de los pasos 6 a 11 del protocolo de problema inverso para el problema de flujo oblicuo con velocidad constante en todo el dominio

5.4.3 Segundo protocolo

El protocolo anteriormente descrito no es el único posible, ya que también se puede determinar la componente horizontal de la velocidad haciendo uso de las curvas universales obtenidas en el Capítulo 4. Los datos de partida son las propiedades térmicas del terreno, la profundidad H del acuífero, las temperaturas en la superficie del terreno (T_1), en las fronteras de entrada de agua (T_2), un perfil vertical de temperatura registrado más allá de la longitud característica horizontal, a una posición x_o , denominado $(T - y)_{x_o}$, y dos medidas de temperatura a una profundidad $H/2$ en dos posiciones x_a y x_b ($T_{x_a, H/2}$ y $T_{x_b, H/2}$) dentro de la región característica afectada por la componente horizontal de la velocidad, con $x_a > x_b$ y $x_o > x_a$.

Los pasos 1 a 5 del protocolo son los mismos que los del primer protocolo ya explicado (estimación de la componente vertical de la velocidad mediante simulaciones numéricas), viéndose modificados los siguientes, en la forma:

6) Se adimensionalizan las temperaturas $T_{x_a, \frac{H}{2}}$ y $T_{x_b, \frac{H}{2}}$ utilizando la ecuación $\frac{T - T_{est, \frac{H}{2}}}{T_2 - T_{est, \frac{H}{2}}}$, obteniéndose $T_{x_a, \frac{H}{2}}'$ y $T_{x_b, \frac{H}{2}}'$.

7) Entrando con ambas temperaturas adimensionales en la Figura 4.4.4, se obtienen las posiciones adimensionales $x_a' = \frac{x_a}{l_x^*}$ y $x_b' = \frac{x_b}{l_x^*}$.

8) A partir de la ecuación $x_a' - x_b' = \frac{x_a - x_b}{l_x^*}$ se despeja fácilmente el valor de la longitud característica horizontal l_x^* .

9) Despejar las coordenadas horizontales x_a y x_b a partir de las siguientes expresiones: $x_a' = \frac{x_a}{l_x^*}$ y $x_b' = \frac{x_b}{l_x^*}$.

10) Entrando en el ábaco de la Figura 4.4.2 con los monomios $\frac{\alpha}{v_y H}$ y $\frac{l_x^*}{H}$ se determina la relación v_x/v_y , de la que se obtiene la componente horizontal de la velocidad.

5.4.4 Ejemplo de aplicación

Debido a que el primer protocolo requiere, por un lado, mayor número de datos de temperatura (tres perfiles verticales frente a un perfil y dos mediciones más de temperaturas) y, por otra parte, es una combinación de los protocolos resueltos en los apartados 5.1 y 5.2, lo interesante es presentar un ejemplo de aplicación para el segundo protocolo.

En primer lugar, se resolverá el problema directo y los resultados se afectarán con un error aleatorio para que se constituyan en los datos de entrada o “de campo” para el problema inverso. Los datos de entrada del problema directo aparecen reflejados en la Tabla 5.4.1. Las temperaturas del perfil temperatura-profundidad fuera de la región característica afectado por la componente horizontal de la velocidad, solución del problema directo se pueden ver en la Tabla 5.4.2.

Finalmente, las temperaturas de entrada del problema inverso para la determinación de la componente vertical de la velocidad, afectadas por errores del 1 y del 3%, aparecen reflejadas en las Tabla 5.4.3.

Datos geométricos	H = 1 m L = 10 m $x_a - x_b = 1$ m
Propiedades térmicas	$k_m = 0.4$ cal/(sm°C) $\rho_e c_e = 10^6$ cal/(m³°C) $\alpha = 0.4 \cdot 10^{-6}$ m²/s
Condiciones térmicas de contorno	$T_1 = 1$ °C $T_2 = 2$ °C
Componentes de la velocidad	$v_x = 5 \cdot 10^{-6}$ m/s $v_y = 1 \cdot 10^{-6}$ m/s

Tabla 5.4.1. Datos del escenario del problema directo para el problema transitorio

	$(T_i - y_i)_{x_0, 1 < i < N, \text{problema directo}} \text{ (°C)}$	$(T'_i - y'_i)_{1 < i < N, \text{problema directo}}$
$z_1 = z_1' = 0.1$ m	1.0254	0.0254
$z_2 = z_1' = 0.2$ m	1.0581	0.0581
$z_3 = z_1' = 0.3$ m	1.1000	0.1000
$z_4 = z_1' = 0.4$ m	1.1539	0.1539
$z_5 = z_1' = 0.5$ m	1.2229	0.2229
$z_6 = z_1' = 0.6$ m	1.3116	0.3116
$z_7 = z_1' = 0.7$ m	1.4254	0.4254
$z_8 = z_1' = 0.8$ m	1.5715	0.5715
$z_9 = z_1' = 0.9$ m	1.7591	0.7591

Tabla 5.4.2. Perfil vertical de temperaturas fuera de la región característica afectada por la componente horizontal de la velocidad, solución del problema directo

	$(T'_i - y'_i)_{e=1\%}$	$(T'_i - y'_i)_{e=3\%}$
$z_1' = 0.1$	0.0256	0.0252
$z_2' = 0.2$	0.0580	0.0597
$z_3' = 0.3$	0.1009	0.1011
$z_4' = 0.4$	0.1554	0.1499
$z_5' = 0.5$	0.2208	0.2278
$z_6' = 0.6$	0.3103	0.3209
$z_7' = 0.7$	0.4287	0.4156
$z_8' = 0.8$	0.5701	0.5842
$z_9' = 0.9$	0.7520	0.7650

Tabla 5.4.3. Temperaturas de entrada del problema inverso para la determinación de la componente vertical de la velocidad, aparecen afectadas por errores del 1 y del 3%

A continuación, se representan los perfiles de temperaturas adimensionales afectados por un error del 1% y del 3%, sobre el Ábaco Universal A (Figura 4.1.2.a) obteniendo una estimación inicial del monomio $\frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{c_e \rho_e}{c_{e,w} \rho_{e,w}} \right) \approx 0.42$ para el perfil afectado por un error del 1% (Figura 5.4.3). Despejando la velocidad vertical de esta expresión se obtiene el valor inicial $v_{y,1} = 9.52 \cdot 10^{-7}$ m/s. Haciendo lo mismo para el perfil de temperaturas adimensional afectado por un error del 3%, se estima el mismo valor del monomio $\frac{\alpha}{v_{z,0}H} \left(\frac{c_e \rho_e}{c_{e,w} \rho_{e,w}} \right)$ y, por tanto, la misma velocidad $v_{y,1} = 9.52 \cdot 10^{-7}$ m/s.

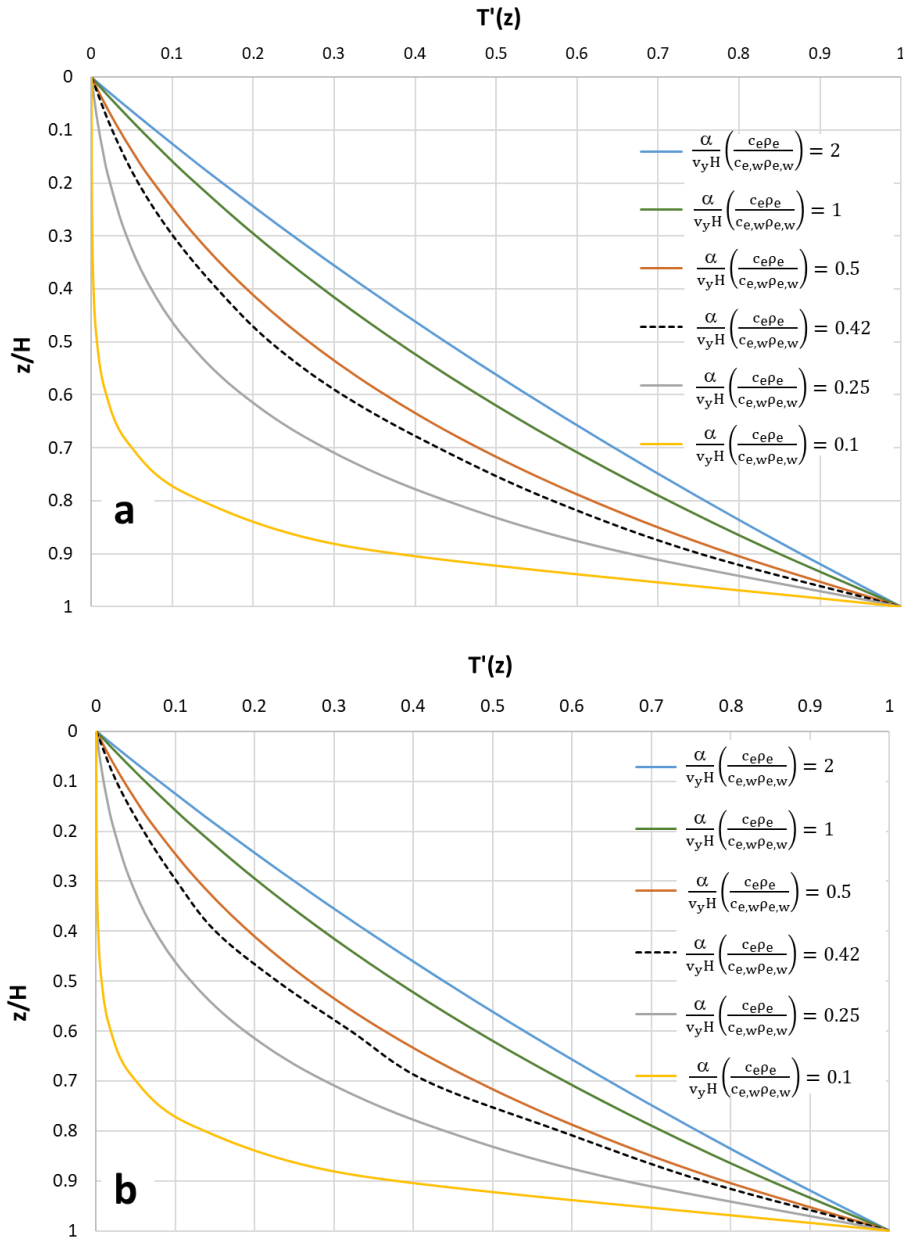


Figura 5.4.3. Estimación del monomio $\frac{\alpha}{v_y H} \left(\frac{c_e \rho_e}{c_{e,w} \rho_{e,w}} \right)$ y determinación de la velocidad $v_{y,1}$ para las mediciones de temperatura afectadas por un error del 1% (a) y del 3% (b), haciendo uso del Ábaco Universal A (Figura 4.1.2)

Los resultados parciales del problema inverso para $(T'_i - z'_i)_{e=1\%}$ aparecen reflejados en la Tabla 5.4.4.

$v_{y,1} = 9.52 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$					
z/H	T'_i	$T'_{i,e=1\%}$	$(T'_{i,e=1\%} - T'_i)^2$	$T'_{i,e=3\%}$	$(T'_{i,e=3\%} - T'_i)^2$
0.1	0.0275	0.0256	$3.5517 \cdot 10^{-6}$	0.0252	$5.3444 \cdot 10^{-6}$
0.2	0.0623	0.0580	$1.8789 \cdot 10^{-5}$	0.0597	$6.7667 \cdot 10^{-6}$
0.3	0.1065	0.1009	$3.0932 \cdot 10^{-5}$	0.1011	$2.8959 \cdot 10^{-5}$
0.4	0.1625	0.1554	$4.9940 \cdot 10^{-5}$	0.1499	$1.5888 \cdot 10^{-4}$
0.5	0.2335	0.2208	$1.6120 \cdot 10^{-4}$	0.2278	$3.2123 \cdot 10^{-5}$
0.6	0.3236	0.3103	$1.7602 \cdot 10^{-4}$	0.3209	$7.0987 \cdot 10^{-6}$
0.7	0.4379	0.4287	$8.5493 \cdot 10^{-5}$	0.4156	$4.9880 \cdot 10^{-4}$
0.8	0.5828	0.5701	$1.6018 \cdot 10^{-4}$	0.5842	$2.0180 \cdot 10^{-6}$
0.9	0.7667	0.7520	$2.1712 \cdot 10^{-4}$	0.7650	$3.0165 \cdot 10^{-6}$
			$\varphi_1 = 9.0322 \cdot 10^{-4}$	$\varphi_1 = 7.4301 \cdot 10^{-4}$	

Tabla 5.4.4. Resultados parciales del problema inverso para $(T'_i - z'_i)_{e=1\%}$

Ya que, para esta velocidad $v_{y,1} = 9.52 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$, se obtienen funcionales inferiores a 10^{-3} , la componente vertical de la velocidad tendrá el valor de $9.52 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$.

Del perfil vertical de temperaturas en el estacionario en una posición horizontal lo suficientemente alejada de la región característica horizontal ($x \gg l_x^*$) se obtiene la temperatura $T_{\text{est},\frac{H}{2}} = 1.2335^\circ\text{C}$. Las temperaturas $T_{x_a,\frac{H}{2}}$ y $T_{x_b,\frac{H}{2}}$ afectadas por errores aleatorios del 1 y del 3% aparecen reflejadas en la Tabla 5.4.5 y escritas en forma adimensional en la Tabla 5.4.6:

$T_{x_a,\frac{H}{2}} (^\circ\text{C})$	$T_{x_a,\frac{H}{2},e=1\%} (^\circ\text{C})$	$T_{x_a,\frac{H}{2},e=3\%} (^\circ\text{C})$	$T_{x_b,\frac{H}{2}} (^\circ\text{C})$	$T_{x_b,\frac{H}{2},e=1\%} (^\circ\text{C})$	$T_{x_b,\frac{H}{2},e=3\%} (^\circ\text{C})$
1.4278	1.4252	1.4419	1.6819	1.6823	1.7262

Tabla 5.4.5. Temperaturas de entrada al problema inverso para la determinación de la componente horizontal de la velocidad, afectadas por errores aleatorios del 1 y del 3%

$T'_{x_a,\frac{H}{2},e=1\%}$	$T'_{x_a,\frac{H}{2},e=3\%}$	$T'_{x_b,\frac{H}{2},e=1\%}$	$T'_{x_b,\frac{H}{2},e=3\%}$
0.2501	0.2719	0.5855	0.6824

Tabla 5.4.6. Temperaturas de entrada (adimensionalizadas) del problema inverso para la determinación de la componente horizontal de la velocidad, afectadas por errores aleatorios del 1 y del 3%

Introduciendo los pares de temperaturas $(T_{x_{a/2}, H, e=1\%}', T_{x_{b/2}, H, e=1\%}')$ y $(T_{x_{a/2}, H, e=3\%}', T_{x_{b/2}, H, e=3\%}')$ en la Figura 4.4.3, se obtienen las posiciones adimensionales $x_{a'}'_{e=1\%} = \frac{x_a}{l_x^*}$, $x_{b'}'_{e=1\%} = \frac{x_b}{l_x^*}$, $x_{a'}'_{e=3\%} = \frac{x_a}{l_x^*}$, $x_{b'}'_{e=3\%} = \frac{x_b}{l_x^*}$. Véase Figuras 5.4.4 y 5.4.5.

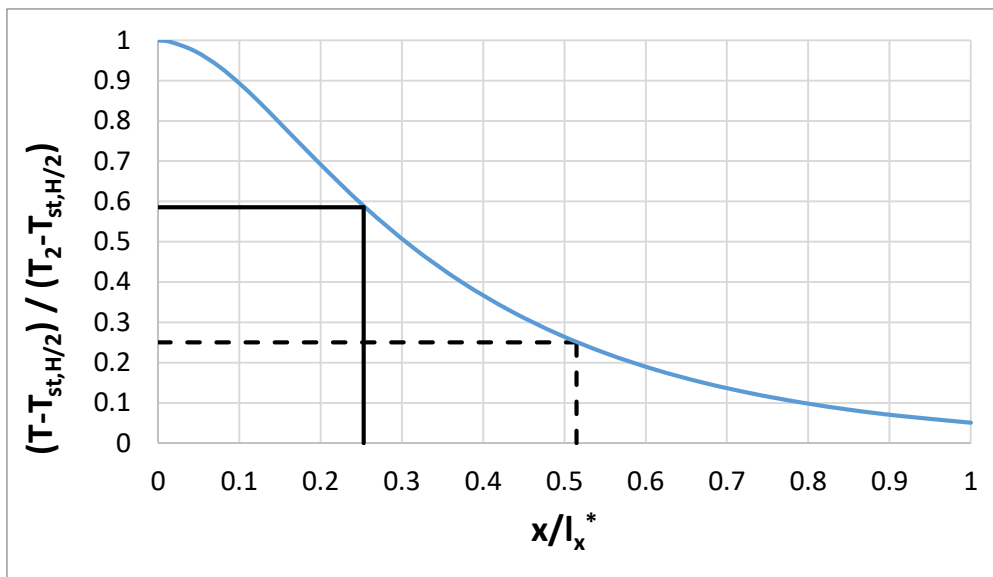


Figura 5.4.4. Estimación de las coordenadas adimensionales $x_a' = \frac{x_a}{l_x^*}$ y $x_b' = \frac{x_b}{l_x^*}$ a partir de las temperaturas $T_{x_{a/2}, H}$ y $T_{x_{b/2}, H}$ afectadas por un error aleatorio del 1%

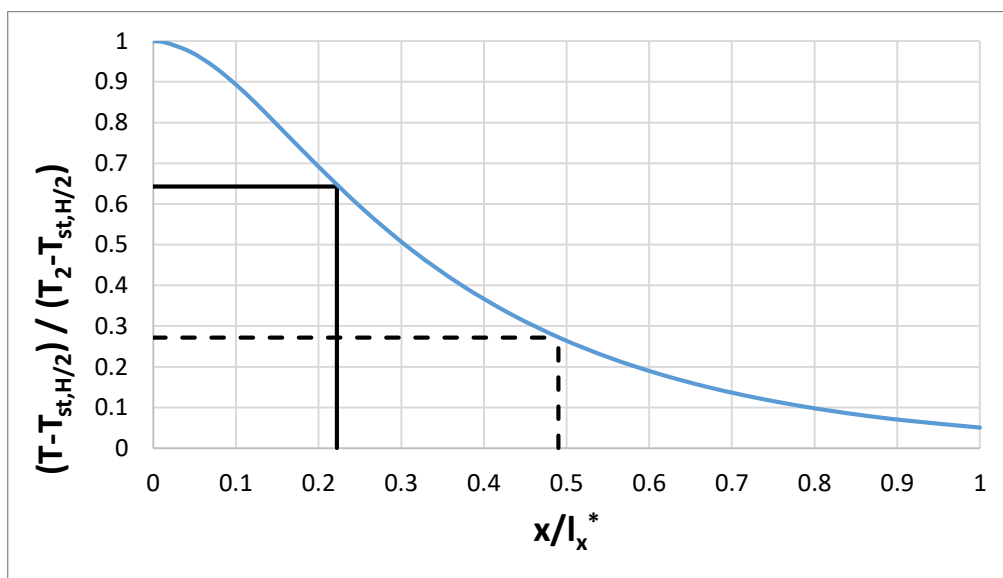


Figura 5.4.5. Estimación de las coordenadas adimensionales $x_a' = \frac{x_a}{l_x^*}$ y $x_b' = \frac{x_b}{l_x^*}$ a partir de las temperaturas $T_{x_{a/2}, H}$ y $T_{x_{b/2}, H}$ afectadas por un error aleatorio del 3%

Para un error aleatorio del 1%, las posiciones adimensionales son: $x_{a'e=1\%} = \frac{x_a}{l_{x'e=1\%}^*} = 0.5150$

y $x_{b'e=1\%} = \frac{x_b}{l_{x'e=1\%}^*} = 0.2530$. Por tanto, aplicando la ecuación $x_{a'e=1\%} - x_{b'e=1\%} = \frac{x_a - x_b}{l_{x'e=1\%}^*}$ y

despejando, se obtiene que:

$$l_{x'e=1\%}^* = \frac{x_a - x_b}{x_{a'e=1\%} - x_{b'e=1\%}} = \frac{1}{0.2620} = 3.8168 \text{ m}$$

Entrando en la Figura 4.4.2 se obtiene un valor del cociente $\frac{v_x}{v_y} \approx 5$, del que puede estimarse la

velocidad horizontal, $v_x = 4.76 \cdot 10^{-6}$. Véase Figura 5.4.6.

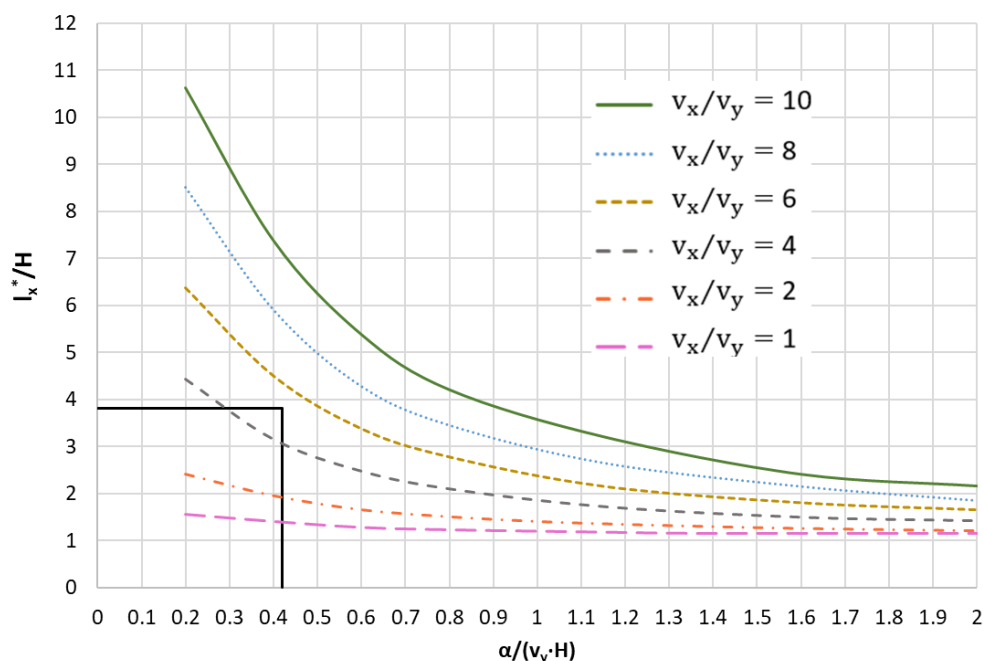


Figura 5.4.6. Estimación del cociente $\frac{v_x}{v_y}$ para las temperaturas afectadas por un error del 1%

Por otra parte, para un error aleatorio del 3%, las posiciones adimensionales son $x_{a'e=3\%} =$

$\frac{x_a}{l_{x'e=3\%}^*} = 0.4900$ y $x_{b'e=3\%} = \frac{x_b}{l_{x'e=3\%}^*} = 0.2220$. Despejando la longitud característica de la

ecuación $x_{a'e=3\%} - x_{b'e=3\%} = \frac{x_a - x_b}{l_{x'e=3\%}^*}$, se obtiene que:

$$l_{x'e=3\%}^* = \frac{x_a - x_b}{x_{a'e=3\%} - x_{b'e=3\%}} = \frac{1}{0.2680} = 3.7313 \text{ m}$$

Finalmente, entrando en la Figura 4.4.2 se obtiene un valor del cociente $\frac{v_x}{v_y} \approx 5$, estimándose la

velocidad horizontal en el valor $v_x = 4.76 \cdot 10^{-6}$. Véase Figura 5.4.7.

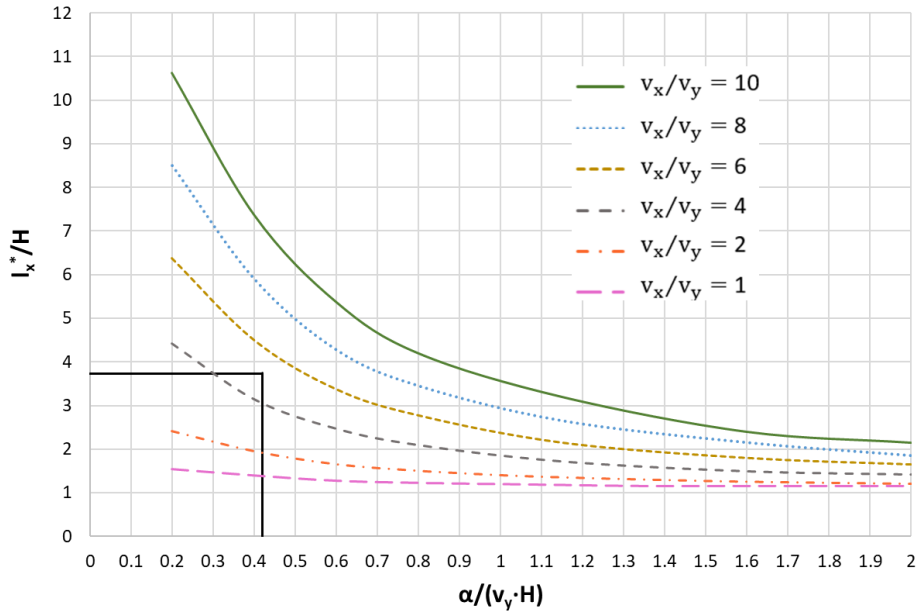


Figura 5.4.7. Estimación del cociente $\frac{v_x}{v_y}$ para las temperaturas afectadas por un error del 3%

Para finalizar este apartado, en la Figura 5.4.8 se representa el diagrama de bloques de los pasos 6 a 10 del protocolo aplicado. En base a los ejemplos propuestos, se puede afirmar con rotundidad que los protocolos propuestos son exactos y eficaces.

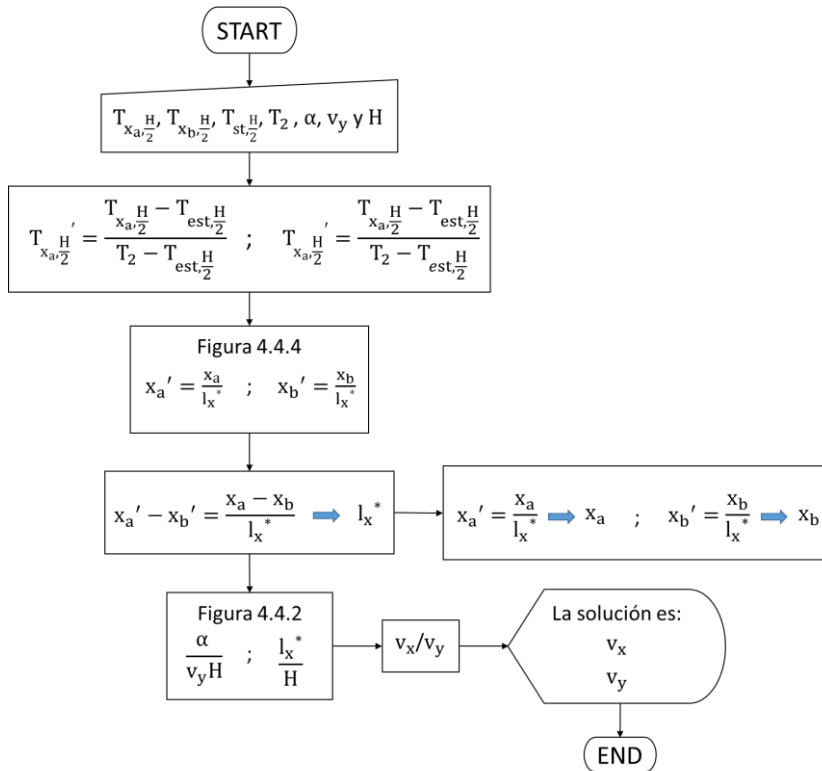


Figura 5.4.8. Pasos 6 a 10 del protocolo de problema inverso aplicado para la determinación de la componente horizontal de la velocidad haciendo uso de ábacos

5.5 Quinta aplicación. Interacción río-acuífero

Para este escenario en el que se produce una recarga desde el río hacia el acuífero o una descarga desde el acuífero al río, se propone el siguiente protocolo de problema inverso para la determinación, en primer lugar, del cociente entre permeabilidades y , en segundo lugar, del caudal de descarga o recarga. En este protocolo se hará uso, tanto de superficies universales, como de un ábaco universal.

5.5.1 Nomenclatura

T_{r1}, T_{r2}	temperaturas registrada dos puntos diferentes del acuífero
x/L	posición horizontal adimensional
y/H	posición vertical adimensional

Superíndices

$(\cdot)'$ denota carácter adimensional

Subíndices

$(\cdot)_{T_{r1}}$	relativo a la temperatura T_{r1}
$(\cdot)_{T_{r2}}$	relativo a la temperatura T_{r2}
$(\cdot)_{e=1\%}$	relativo a un error aleatorio del 1%
$(\cdot)_{e=3\%}$	relativo a un error aleatorio del 3%

5.5.2 Descripción del protocolo

Los datos de entrada son los siguientes:

- Geometría del escenario: Profundidad H , longitud L del acuífero y anchura del río l_r .
- Conductividad térmica k_m y calor específico $\rho_e c_e$ de la matriz agua-terreno.
- Potenciales hidráulicos en el río y en el borde derecho del acuífero (h_1 y h_2).
- Temperaturas en la superficie del terreno (T_1) y en el fondo del dominio (T_2).
- Dos temperaturas registradas en cualquier punto del dominio y conocidas su posición, llamadas T_{r1} y T_{r2} .

Los pasos son los siguientes:

1) Determinar los factores de forma geométricos o grupos adimensionales y discriminados del escenario L/H y l_r/L .

2) Adimensionalizar las temperaturas T_{r1} y T_{r2} utilizando las expresiones $T_{r1}' = \frac{T_{r1}-T_1}{T_2-T_1}$ y $T_{r2}' = \frac{T_{r2}-T_1}{T_2-T_1}$.

3) Calcular las coordenadas adimensionales $(x/L)_{T_{r1}}$, $(y/H)_{T_{r1}}$, $(x/L)_{T_{r2}}$ e $(y/H)_{T_{r2}}$ para las dos temperaturas registradas en el dominio.

- 4) Para la temperatura adimensional T_{r1}' , se conoce $(x/L)_{T_{r1}'}$, $(y/H)_{T_{r1}'}$, además, los factores de forma L/H y l_r/L también son conocidos, por lo que hay que buscar la sábana o superficie universal relativa a la solución $\frac{T-T_1}{T_2-T_1} = \Psi_4 \left(\frac{K_x}{K_y}, \frac{\alpha_c}{K_y(h_2-h_1)}, \frac{L}{H}, \frac{l_r}{L}, \frac{x}{L}, \frac{y}{H} \right)$ en la cual la temperatura T_{r1}' se encuentre contenida, determinando los grupos $\frac{K_x}{K_y}$ y $\frac{\alpha_c}{K_y(h_2-h_1)}$.
- 5) Para asegurarse de que la superficie universal elegida es la correcta, comprobar que la temperatura T_{r2}' se encuentra también contenida en la misma sábana y que las posiciones adimensionales de la misma $(x/L)_{T_{r2}'}$ y $(y/H)_{T_{r2}'}$ son las que se esperaban.
- 6) Si el paso 5 no da los resultados esperados, repetir el paso 4 e investigar otra superficie universal.
- 7) Una vez conocidos los monomios $\frac{K_x}{K_y}$ y $\frac{\alpha_c}{K_y(h_2-h_1)}$, determinar los valores de las permeabilidades K_x y K_y .
- 8) Determinar los grupos adimensionales $\frac{K_x H^2}{L^2 K_y}$ y $\frac{l_r}{L}$ y entrar en el Ábaco universal que representa la solución $\frac{Q}{(h_2-h_1)\sqrt{K_x K_y}} = \Psi_1 \left(\frac{K_x H^2}{L^2 K_y}, \frac{l_r}{L} \right)$
- 9) Obtener gráficamente el monomio $\frac{Q}{(h_2-h_1)\sqrt{K_x K_y}}$ y despejar el valor estimado del caudal.

El diagrama de bloques relativo al presente protocolo se muestra en la Figura 5.5.1.

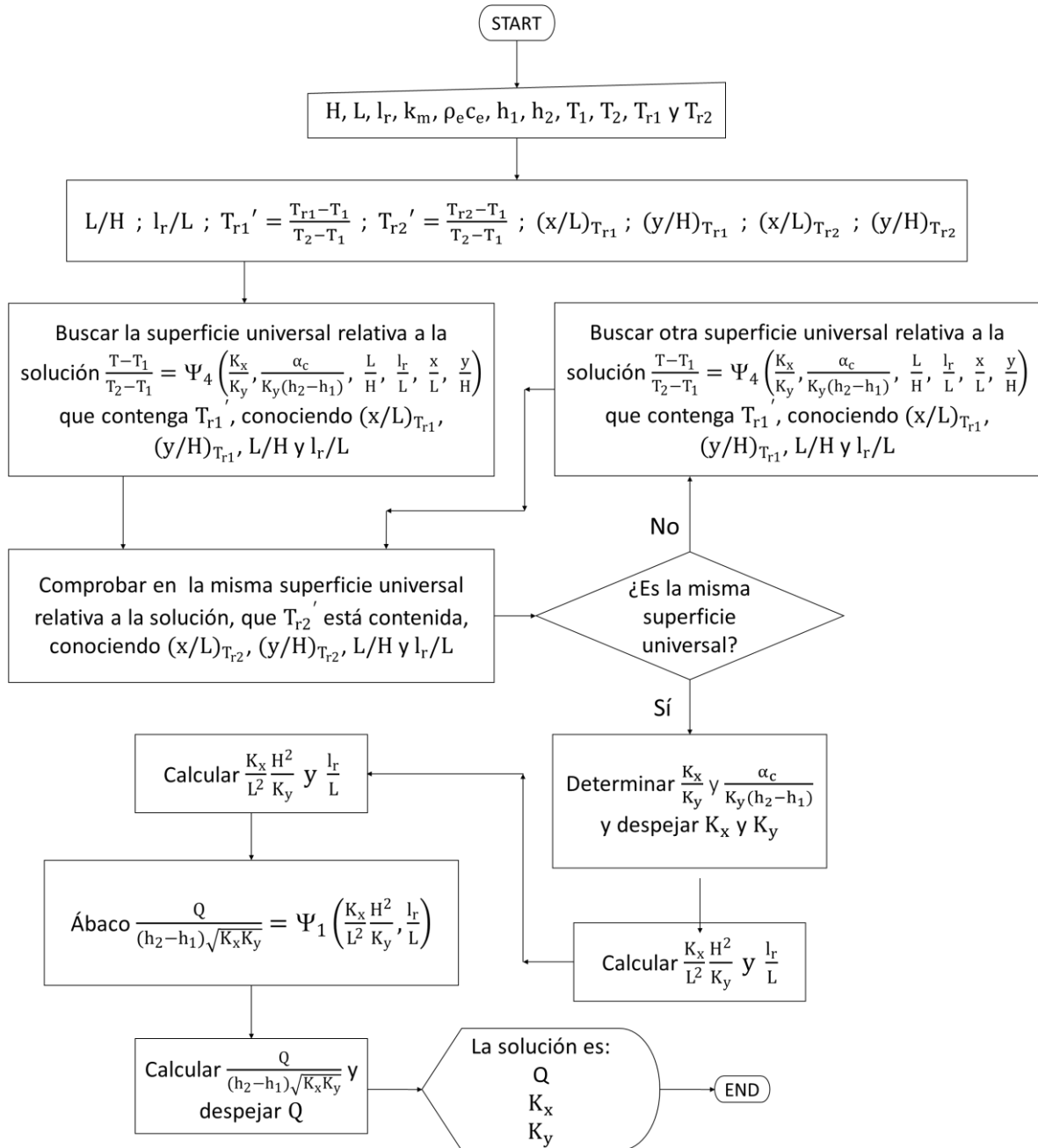


Figura 5.5.1. Protocolo de problema inverso aplicado para la determinación de las permeabilidades y del caudal del escenario de interacción río-acuífero

5.5.3 Ejemplo de aplicación

Los datos de partida para la aplicación del protocolo de problema inverso aparecen en la Tabla 5.5.1. En la Tabla 5.5.2 aparecen reflejadas las temperaturas T_{r1} y T_{r2} afectadas por errores aleatorios del 1 y del 3 %.

Geometría del acuífero y datos geométricos relativos a los puntos de medida	$H = 10 \text{ m}$ $L = 50 \text{ m}$ $l_r = 5 \text{ m}$ $x_{T_{r1}} = l_r$ $x_{T_{r2}} = l_r$ $y_{T_{r1}} = 2.5 \text{ m}$ $y_{T_{r2}} = 5.0 \text{ m}$
Propiedades térmicas	$\rho_e c_e = 10^6 \text{ cal}/(\text{m}^3\text{°C})$ $\rho_{e,w} c_{e,w} = 10^6 \text{ cal}/(\text{m}^3\text{°C})$ $\alpha_c = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
Condiciones térmicas de contorno	$T_1 = 15 \text{ °C}$ $T_2 = 20 \text{ °C}$
Condiciones hidráulicas de contorno	$h_1 = 0 \text{ m}$ $h_2 = 1 \text{ m}$ $K_x = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$ $K_y = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$
Temperaturas registradas en el acuífero	$T_{r1} = 15.41 \text{ (°C)}$ $T_{r2} = 16.39 \text{ (°C)}$

Tabla 5.5.1. Parámetros geométricos, térmicos e hidráulicos de entrada al problema inverso y temperaturas registradas en dos puntos diferentes del dominio

$T_{r1e=1\%}$ (°C)	15.43
$T_{r2e=1\%}$ (°C)	16.30
$T_{r1e=3\%}$ (°C)	15.34
$T_{r2e=3\%}$ (°C)	16.66

Tabla 5.5.2. Temperaturas registradas en el acuífero afectadas por errores aleatorios del 1 y del 3%

En primer lugar, se deben calcular los factores de forma geométricos. Para el presente ejemplo tienen un valor de: $L/H = 5$ y $l_r/L = 0.1$. En segundo lugar, las temperaturas de la Tabla 5.5.2 deben adimensionalizarse utilizando la expresión: $T_{r1}' = \frac{T_{r1}-T_1}{T_2-T_1}$ y $T_{r2}' = \frac{T_{r2}-T_1}{T_2-T_1}$. Véase Tabla 5.5.3.

$T_{r1e=1\%}'$	0.0867
$T_{r2e=1\%}'$	0.2601
$T_{r1e=3\%}'$	0.0679
$T_{r2e=3\%}'$	0.3316

Tabla 5.5.3. Temperaturas registradas en el acuífero afectadas por errores aleatorios del 1 y del 3% y adimensionalizadas

Las posiciones adimensionales de los puntos en los cuales se han registrado ambas temperaturas son las reflejadas en la Tabla 5.5.4.

$(x/L)_{T_{r1}}$	0.10
$(y/H)_{T_{r1}}$	0.25
$(x/L)_{T_{r2}}$	0.10
$(y/H)_{T_{r2}}$	0.50

Tabla 5.5.4. Posiciones adimensionalizadas de los puntos en los cuales se han registrado T_{r1} y T_{r2}

Entrando en la Figura 4.5.5.b, para ambos valores de las temperaturas adimensionales (T_{r1}' y T_{r2}') y para ambos errores aleatorios, la sábana que claramente contiene T_{r1}' y T_{r2}' es la relativa a un cociente entre permeabilidades de $K_x/K_y = 1$ y a un valor del monomio $\frac{\alpha_c}{K_y(h_2-h_1)} = 0.05$. Por tanto, podemos despejar los valores de la permeabilidad vertical y posteriormente determinar la permeabilidad horizontal a partir del monomio K_x/K_y . Ambas componentes de la permeabilidad tendrán un valor de $K_x = K_y = 5 \cdot 10^{-5}$ m/s.

El último paso requiere entrar en el ábaco universal que representa la solución $\frac{Q}{(h_2-h_1)\sqrt{K_x K_y}} = \Psi_1 \left(\frac{K_x H^2}{L^2 K_y}, \frac{l_r}{L} \right)$. Entrando en la Figura 4.5.3 (véase Figura 5.5.2) con los monomios $\frac{K_x H^2}{L^2 K_y} = 0.04$ y $\frac{l_r}{L} = 0.1$, se obtiene un valor del caudal adimensional $\frac{Q}{(h_2-h_1)\sqrt{K_x K_y}} = 0.2$. El caudal de recarga al acuífero tendrá un valor de $0.00001 \text{ m}^3/\text{s}$.

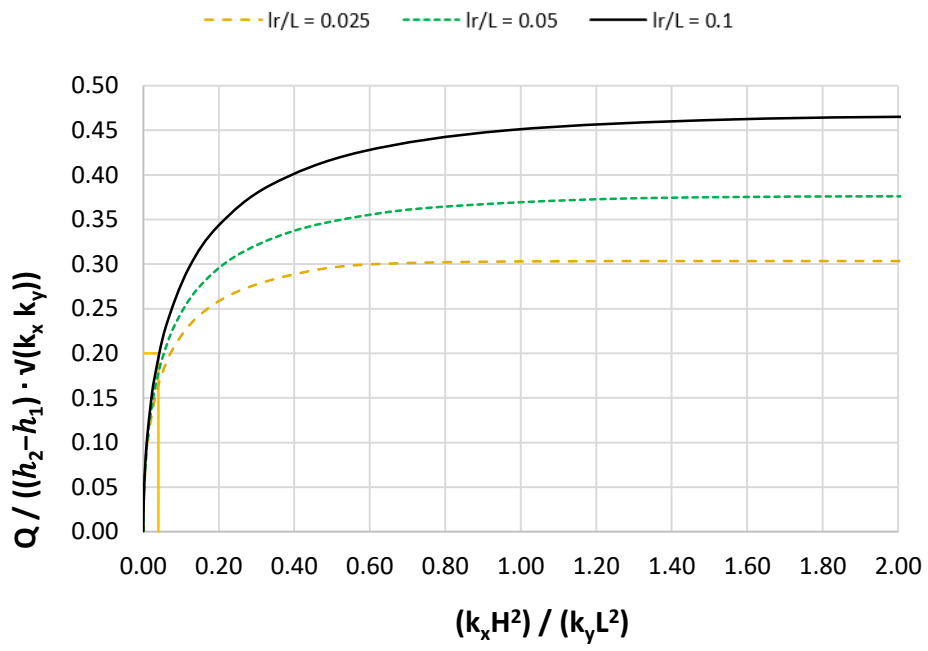


Figura 5.5.2. Determinación del caudal adimensional

Capítulo 6. Aplicación en el entorno del Mar Menor

- 6.1** **Introducción**
- 6.2** **Descripción del área de estudio**
- 6.3** **Aplicación de protocolo de problema inverso**

6.1 Introducción

El campo de Cartagena es una compleja unidad hidrogeológica que ocupa una extensión en superficie de aproximadamente 1450 km², de los cuales 1200 km² pertenecen a la Región de Murcia y el resto a la provincia de Alicante. Es una de las cuencas interiores postectónicas de la Cordillera Bética, situada al sur de la Península Ibérica. Los límites norte y sur están determinados por las fallas que ponen en contacto los acuíferos del Campo de Cartagena con los materiales poco permeables de las sierras béticas de Carrascoy y Cartagena. El límite oeste lo constituye un conjunto de fallas que provoca depresiones con grandes rellenos margosos terciarios y, finalmente, el límite este viene fijado por la presencia del Mar Mediterráneo (Jiménez y Rueda [2003]).

Según los estudios del IGME [1974] y del ITGE [1994] está formado por materiales del Mioceno (en su mayor parte Tortoniense-Messiniense), Plioceno y Cuaternario. El Tortoniense está formado por un espesor de 200 metros de conglomerados poligénicos y arenas, seguidas de facies margosas. En la parte superior, hay una formación de unos 125 metros de espesor compuesta por calizas bioclásticas Messinienses, así como calcarenitas clarificando hacia la superficie a margas. El Plioceno se caracteriza por niveles detríticos, partiendo de un espesor de 20 metros de arenas que se afinan hacia la superficie a 90 metros de margas y arcillas, dentro de los cuales hay yeso intercalado. Finalmente, el acuífero Cuaternario muestra facies de arcilla, limo, conglomerados locales y arenas. El Cuaternario tiene un espesor aproximado de entre 40 y 60 metros, pudiendo llegar a los 100 metros en puntos cercanos a la línea de costa (Rey y col., 2013). La litología del Campo de Cartagena aparece representada en la Figura 6.1.1 y su leyenda en la Figura 6.1.2

Desde el punto de vista hidrogeológico, en el Campo de Cartagena se pueden diferenciar cinco acuíferos suprayacentes (ITGE [1994], Jiménez Martínez y col. [2009], Jiménez Martínez y col. [2011] y Rey y col. [2013]). Dichos acuíferos están asociados con el Triásico (carbonatos), Tortoniense (conglomerados), Messiniense (calizas bioclásticas), Plioceno (areniscas) y el Cuaternario (constituido por gravas y arenas). Este último acuífero descansa sobre facies de marga del plioceno, siendo el objeto de estudio. El acuífero del Cuaternario es un acuífero superficial muy importante desde el punto de vista medioambiental, debido a que es la principal vía de descarga de agua subterránea y, por lo tanto, de nutrientes antrópicos (de origen principalmente agrícola) a la laguna salada y costera del Mar Menor (Ministerio de Medio Ambiente [2006], García-Pintado y col. [2007] y Rey y col. [2013]).

Estudios como los de Aragón y col. [1988] y Rodríguez Estrella [2003] analizaron la sobreexplotación entre otros, del acuífero del Cuaternario. Hasta la construcción del trasvase Tajo – Segura, las aguas subterráneas fueron la principal fuente de agua. A partir de la década de 1980, el aumento cada vez mayor de las cantidades de agua trasvasadas, sumadas a la pluviometría excepcionalmente elevada en el año 1989, provocó una importante reducción de los bombeos de agua subterránea y, por tanto, un aumento del nivel piezométrico significativo en el Cuaternario (Rey y col. [2013]). El trasvase Tajo – Seguro ha tenido un doble efecto positivo: la disminución del caudal bombeado de agua subterránea, así como la infiltración de excedentes de riego con aguas externas al sistema acuífero (Aragón [1999] y Jiménez y Rueda [2003]).

Por tanto, la recarga se produce a partir de la infiltración del agua de lluvia, de los excedentes del regadío y de aportes laterales procedentes de la Sierra de Cartagena (Jiménez y Rueda [2003]). Respecto a la descarga, se produce por bombeo y por descarga al Mar Menor. Según los autores Jiménez y Rueda [2003], la unidad hidrogeológica del Campo de Cartagena presenta un balance equilibrado e incluso positivo a favor de las entradas, según los diferentes estudios que se publicaron hasta dicho año.

Respecto al funcionamiento hidrogeológico, la compleja estructura tectónica interna de la depresión y el carácter discordante de sus formaciones hace que en muchas zonas exista una conexión hidráulica entre acuíferos, la cual se ha visto incrementada por las actividades antrópicas destinadas a la captación de agua subterráneas (Jiménez y Rueda [2003]). Éste efecto ha sido analizado y evidenciado en el estudio de Paul Baudron y col. [2013] trabajando con perfiles de temperatura en un sondeo que conecta los acuíferos del Cuaternario y del Plioceno.

En el hecho de que se produzca la eutrofización en el Mar Menor, el acuífero del Cuaternario presenta un papel fundamental debido a que el sistema de drenaje de la cuenca es una red formada en su mayor parte por canales efímeros que, generalmente sólo transportan agua durante eventos puntuales, excepto por pequeñas áreas cercanas a la costa (Rey y col. [2013]). La Rambla del Albuñón es el canal principal de drenaje superficial. En la Figura 6.1.3 se pueden apreciar los principales cursos de agua superficiales cercanos a la Laguna del Mar Menor.

Los autores Pintado y col. [2007] estimaron que el agua descargada desde el acuífero Cuaternario aporta el 10% ($0.7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{año}$) del vertido superficial total de la Rambla del Albuñón (principal cauce de la cuenca) al Mar Menor. El 90% restante se vierte directamente desde fuentes puntuales agrícolas y urbanas. Considerada en su totalidad la unidad hidrogeológica del Campo de Cartagena, la recarga media anual evaluada para el período 1940-1989 es de $83 \text{ hm}^3/\text{año}$ (Jiménez y Rueda [2003]).

En este capítulo de la tesis, se pretende aplicar el protocolo estudiado en el capítulo 5 para flujo horizontal a partir de datos térmicos registrados experimentalmente en dos sondeos ubicados en Los Alcázares (Cartagena) cerca de la línea de costa para estimar, de forma aproximada, la velocidad horizontal del flujo de descarga de agua subterránea en dicha zona procedente del acuífero Cuaternario hacia el Mar Menor.

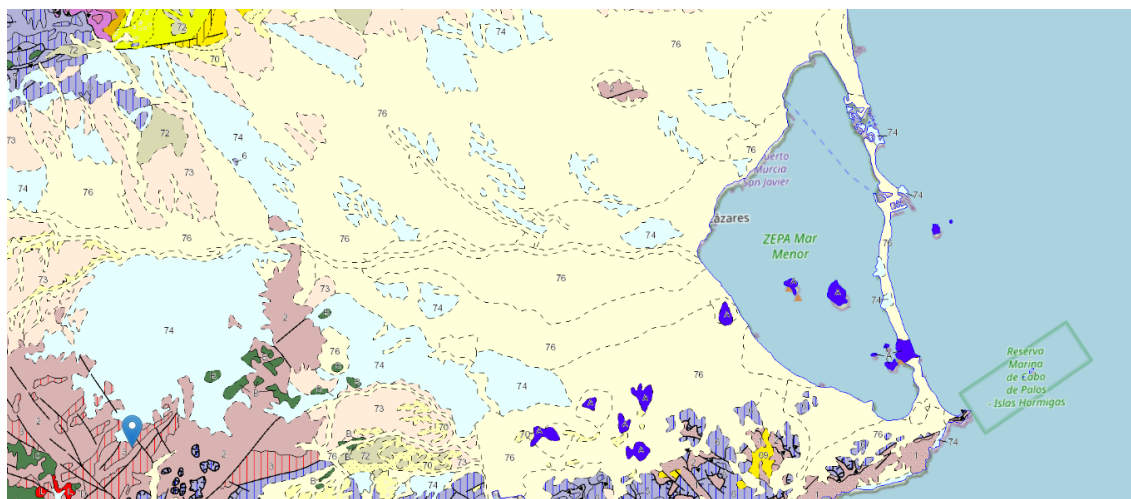


Figura 6.1.1. Litología del Campo de Cartagena [Obtenido de la web visoriderm.carm.es/]

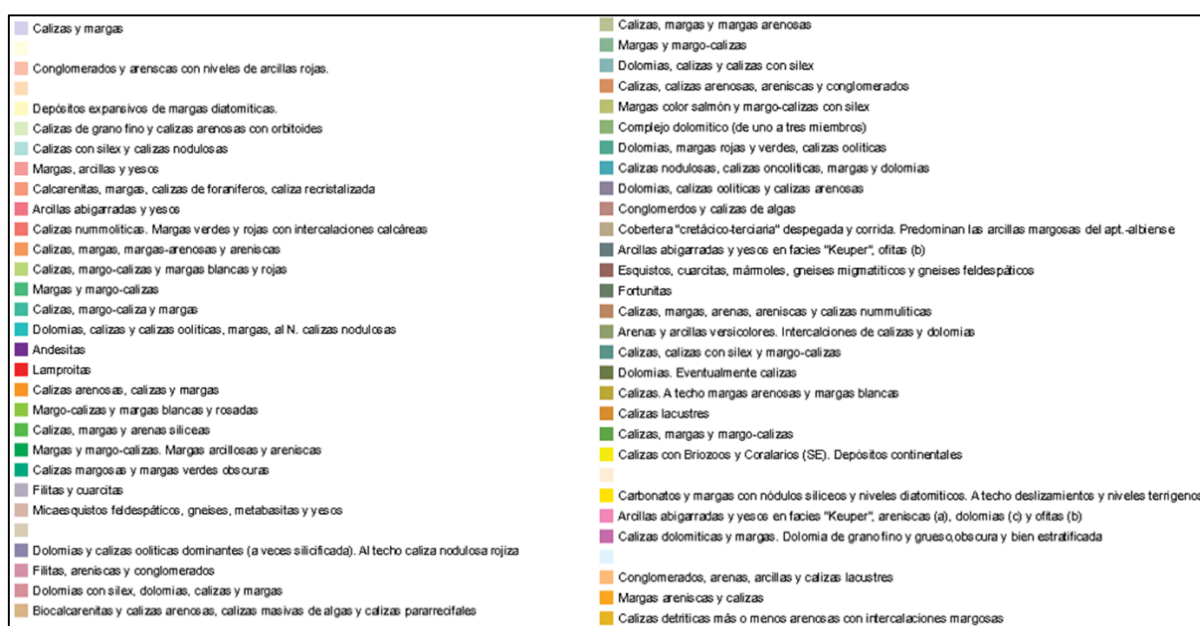


Figura 6.1.2. Leyenda de la litología del Campo de Cartagena [Obtenido de la web visoriderm.carm.es/]



Figura 6.1.3. Principales cursos de agua superficial en el Campo de Cartagena. [Fondo: <https://www.ign.es/wms-inspire/pnoa-ma>. Cursos de agua: extraídos del .shp “hi_tramocurso_I_ES070” y modificado en gvSIG]

6.2 Descripción del área de estudio

Para la aplicación del protocolo de problema inverso descrito y ejemplificado en el apartado 5.2 de la memoria (Capítulo 5), se han registrado las temperaturas del agua subterránea en dos sondeos ubicados en el municipio de Los Alcáceres, entre la Eco Área de Los Alcáceres y el aeropuerto de San Javier. El primer sondeo (denominado Séneca 5) se encuentra frente a la Eco Área, mientras que el segundo (Séneca 4) está ubicado junto al “Paseo Sofía”, cercano al Observatorio de Aves, siendo de 519 metros la distancia entre ambos sondeos (Figuras 6.2.1, 6.2.2, 6.2.3 y 6.2.4). Los datos se registraron durante aproximadamente un mes (26 días completos desde el 27 de enero al 22 de febrero de 2022) cada hora y a diferentes profundidades (véase Tablas 6.2.1 y 6.2.2).



Figura 6.2.1. Vista aérea de los sondeos Séneca 5 y Séneca 4 utilizados para la obtención de perfiles temporales de temperaturas. [Imagen: Google Earth Pro]

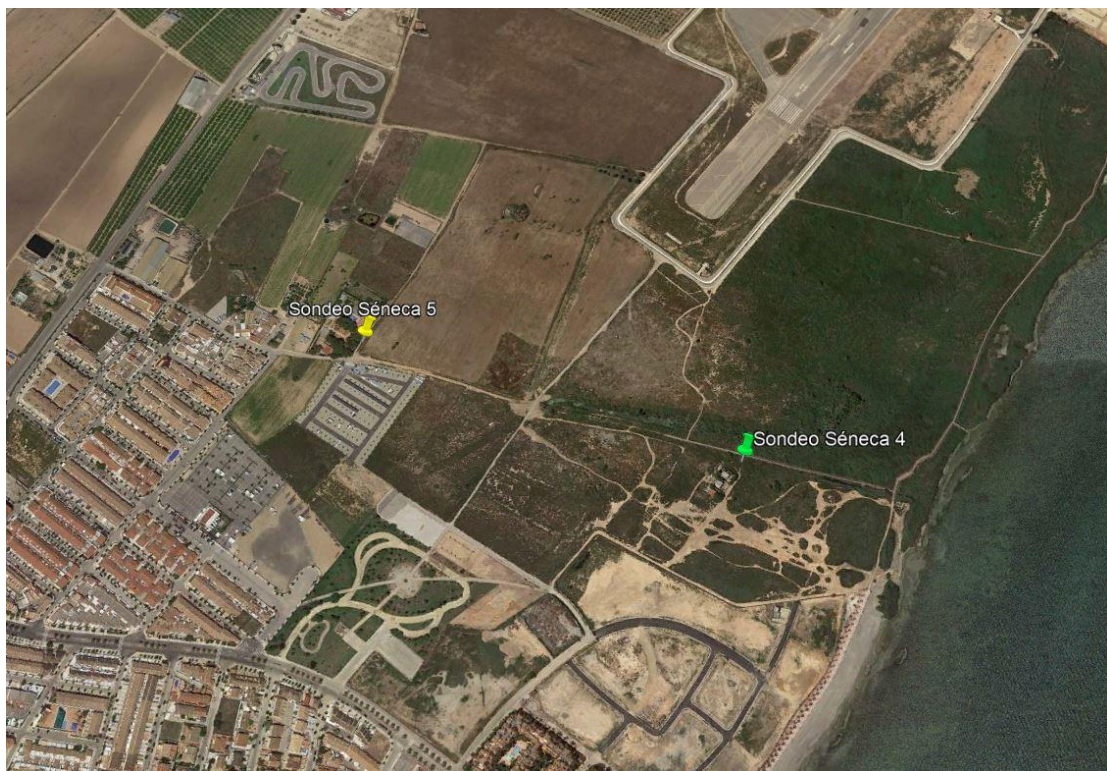


Figura 6.2.2. Zoom de la vista aérea de los sondeos Séneca 5 y Séneca 4 utilizados para la obtención de perfiles temporales de temperaturas. [Imagen: Google Earth Pro]



Figura 6.2.3. Colocación de los ibutton para el registro temporal de las temperaturas en el sondeo Séneca 5



Figura 6.2.4. Colocación de los ibutton para el registro temporal de la tempetura en el nivel freático en el sondeo Séneca 2

Sondeo Séneca 5	
Ibutton	Profundidad
S5 – NF	Nivel freático
S5 – 1	2.16
S5 – 2	6.75
S5 – 3	10.75
S5 – 4	18.75
S5 – 5	33.75

Tabla 6.2.1. Denominación y profundidad de cada ibutton en el sondeo Séneca 5

Sondeo Séneca 4	
Ibutton	Profundidad
S4 – NF	Nivel freático
S4 – 1	0.75
S4 – 2	2.75
S4 – 3	5.75
S4 – 4	33.75

Tabla 6.2.2. Denominación y profundidad de cada ibutton en el sondeo Séneca 4

6.3 Aplicación de protocolo de problema inverso

Los datos de partida para la aplicación del protocolo de problema inverso son los perfiles verticales de temperatura que aparecen representados en las Figuras 6.3.1 y 6.3.2. Se aprecia claramente como la forma que adquieren es debida a la presencia de flujo horizontal de agua subterránea. No es descartable la presencia de una componente vertical del agua subterránea cerca de la superficie, pero, en todo caso, sería mucho menor a la componente horizontal, permitiendo la aplicación del protocolo clásico de problema inverso para flujos horizontales.

Para proponer un valor de difusividad térmica, por un lado, se han tomado como referencia los valores de la recogidos en la Tabla 6.3.1, procedente del trabajo de Taniguchi [1993].

Por otra parte, trabajando con los datos diarios de temperatura registrados, se ha observado que la amplitud de la misma en el sondeo S5-1, es un 60% inferior a la registrada en el nivel freático. Utilizando la expresión (4.2.22) deducida en el Capítulo 4, $l_{y,T}^* = C_2 \sqrt{\alpha\tau}$, se ha calculado el valor de la constante C_2 para una longitud característica en la cual la amplitud de la temperatura cae un 60%, obteniéndose un valor $C_2 = 0.487$. Aplicando nuevamente la ecuación (4.2.22) con los datos del sondeo Séneca 5 y, teniendo en cuenta que la separación entre los dos ibuttons (S5-NF y S5-1) es de 0.60 metros, se ha obtenido un valor de la difusividad térmica de $1.098 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, considerando un periodo de 18 días (los 18 días centrales).

Se ha decidido por tanto, teniendo en cuenta el valor calculado por un lado y los valores de la Tabla 6.3.1 por otro, tomar una valor de la difusividad térmica de $\alpha = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Los resultados parciales de la aplicación del protocolo de problema inverso aparecen reflejados en las Tablas 6.3.2 a 6.3.11.

Estudio	Porosidad (%)	k_m ($W^{\circ}C^{-1}m^{-1}$)	α (m^2s^{-1})
Taniguchi [1993]	30	1.59	$5.83 \cdot 10^{-7}$
Andrews & Anderson [1979]	48	1.76	$5.8 \cdot 10^{-7}$
Lapham [1989]	40	1.71	$6.8 \cdot 10^{-7}$
Lovering & Good [1963]	...	1.0	$5.7 \cdot 10^{-7}$
Palmer y col. [1992]	35	2.1	$7.5 \cdot 10^{-7}$
Taniguchi [1985]	30	1.58	$5.78 \cdot 10^{-7}$

Tabla 6.3.1. Propiedades térmicas de los acuíferos recogidas en el trabajo de Taniguchi [1993]

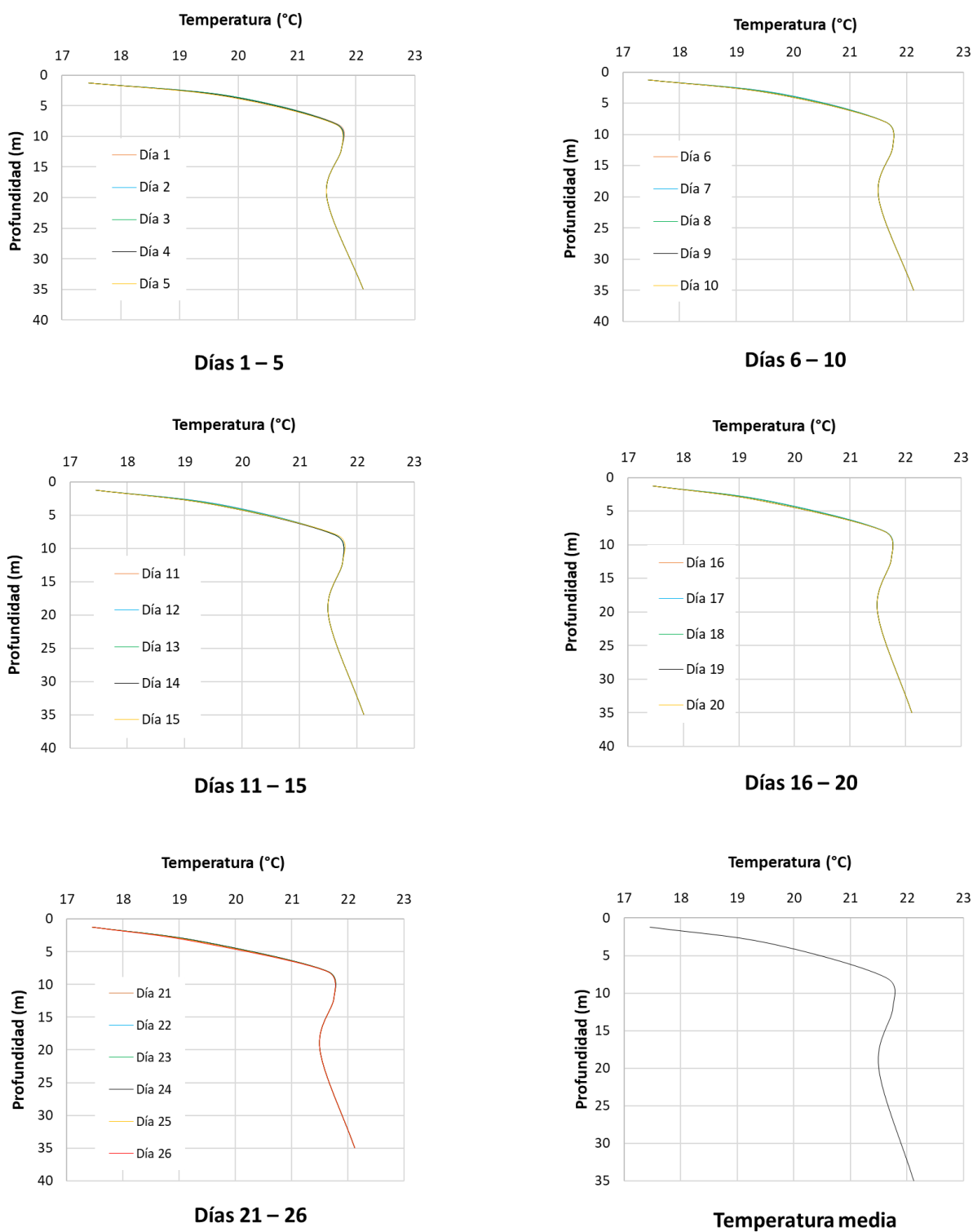


Figura 6.3.1. Perfiles verticales de temperatura media diaria y temperatura media total registrados en el sondeo Séneca 5

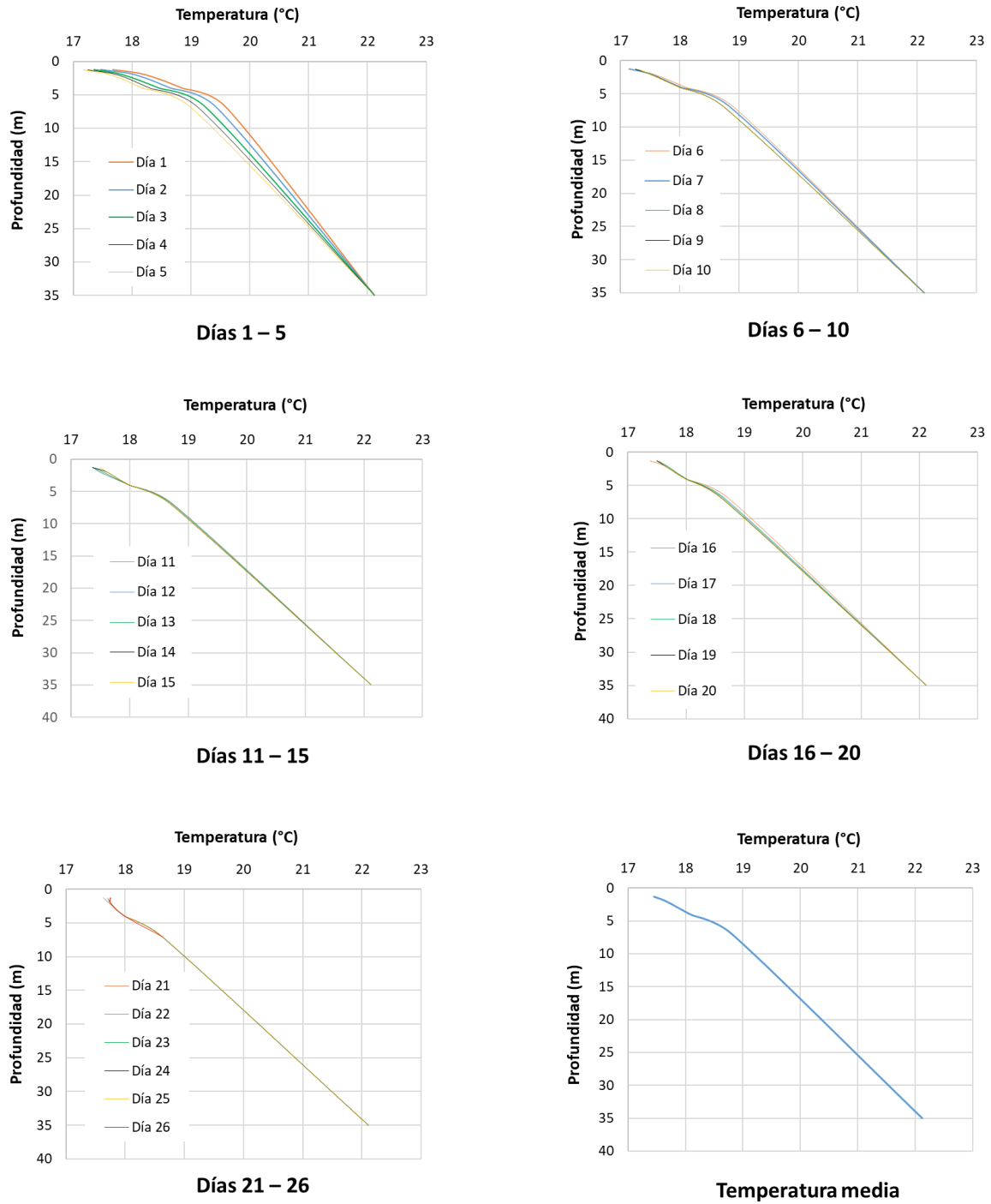


Figura 6.3.2. Perfiles verticales de temperatura media diaria y temperatura media total registrados en el sondeo Séneca 4

Sondeo Séneca 5		T (°C)			$[(T - y)_{x_b,i} - (T - y)_{x_i}]^2$		
y (m)	T (°C)	x = 73 m	x = 148 m	x = 223 m	x = 73 m	x = 148 m	x = 223 m
0	17.4517	17.4517	17.4517	17.4517	0.0000	0.0000	0.0000
2.16	19.5665	17.7460	17.7570	17.7600	3.3142	3.2743	3.2635
6.75	21.6357	18.3955	18.4285	18.4390	10.4990	10.2862	10.2190
10.75	21.7500	18.9550	19.0070	19.0205	7.8120	7.524	7.4502
18.7.5	21.500	20.1200	20.1920	20.2080	1.9044	1.7109	1.6693
33.75	22.1200	22.1200	22.1200	22.1200	0.0000	0.0000	0.0000
$v_{0,x,1} = 5 \cdot 10^{-7}$ m/s ; $T_3 = 19.5^\circ\text{C}$				Ψ_b	23.9257	22.7954	22.6019

Tabla 6.3.2. Resultados parciales del problema inverso para una velocidad de $5 \cdot 10^{-7}$ m/s y una temperatura de entra del agua subterránea de 19.5°C

Sondeo Séneca 5		T (°C)			$[(T - y)_{x_b,i} - (T - y)_{x_i}]^2$		
y (m)	T (°C)	x = 35.63 m	x = 73 m	x = 148 m	x = 35.63 m	x = 73 m	x = 148 m
0	17.4517	17.4517	17.4517	17.4517	0.0000	0.0000	0.0000
2.16	19.5665	18.0450	17.9400	17.8020	2.3150	2.6455	3.1135
6.75	21.6357	19.1610	18.8190	18.5435	6.1242	7.9339	9.7482
10.75	21.7500	19.4405	19.2520	19.0155	5.3338	6.2400	7.4775
18.7.5	21.500	19.5220	19.6510	19.8810	3.9125	3.4188	2.6212
33.75	22.1200	22.1200	22.1200	22.1200	0.0000	0.0000	0.0000
$v_{0,x,1} = 3 \cdot 10^{-6}$ m/s ; $T_3 = 19.5^\circ\text{C}$				Ψ_b	17.6855	20.2382	22.9603

Tabla 6.3.3. Resultados parciales del problema inverso para una velocidad de $3 \cdot 10^{-6}$ m/s y una temperatura de entra del agua subterránea de 19.5°C

Sondeo Séneca 5		T (°C)			$[(T - y)_{x_b,i} - (T - y)_{x_i}]^2$		
y (m)	T (°C)	x = 35.63 m	x = 73 m	x = 148 m	x = 35.63 m	x = 73 m	x = 148 m
0	17.4517	17.4517	17.4517	17.4517	0.0000	0.0000	0.0000
2.16	19.5665	18.6260	18.3130	18.0710	0.8846	1.5713	2.2365
6.75	21.6357	19.4750	19.3400	19.0590	4.6687	5.2703	6.6395
10.75	21.7500	19.5000	19.4890	19.3990	5.0625	5.4421	5.5272
18.7.5	21.500	19.5000	19.5020	19.5440	4.0000	3.9920	3.8259
33.75	22.1200	22.1200	22.1200	22.1200	0.0000	0.0000	0.0000
$v_{0,x,1} = 1 \cdot 10^{-5}$ m/s ; $T_3 = 19.5^\circ\text{C}$				Ψ_b	14.6157	15.9457	18.2291
$\Psi_{a,1} = 2.20$; $x_{b,1} = 554.63$ m							

Tabla 6.3.4. Resultados parciales del problema inverso para una velocidad de $1 \cdot 10^{-5}$ m/s y una temperatura de entra del agua subterránea de 19.5°C

Sondeo Séneca 5		T (°C)			$[(T - y)_{x_b,i} - (T - y)_{x_i}]^2$		
y (m)	T (°C)	x = 35.63 m	x = 73 m	x = 148 m	x = 35.63 m	x = 73 m	x = 148 m
0	17.4517	17.4517	17.4517	17.4517	0.0000	0.0000	0.0000
2.16	19.5665	17.9130	17.8130	17.7730	2.7341	3.0748	3.2167
6.75	21.6357	18.8590	18.5940	18.4470	7.7101	9.2520	10.1679
10.75	21.7500	19.5420	19.2350	19.0750	4.8753	6.3252	7.1556
18.7.5	21.500	20.5870	20.4270	20.2670	0.8336	1.1513	1.5203
33.75	22.1200	22.1200	22.1200	22.1200	0.0000	0.0000	0.0000
$v_{0,x,1} = 5 \cdot 10^{-7}$ m/s ; $T_3 = 20.5^\circ\text{C}$				Ψ_b	16.1531	19.8034	22.0605

Tabla 6.3.5. Resultados parciales del problema inverso para una velocidad de $5 \cdot 10^{-7}$ m/s y una temperatura de entra del agua subterránea de 20.5°C

Sondeo Séneca 5		T (°C)			$[(T - y)_{x_b,i} - (T - y)_{x_i}]^2$		
y (m)	T (°C)	x = 35.63 m	x = 73 m	x = 148 m	x = 35.63 m	x = 73 m	x = 148 m
0	17.4517	17.4517	17.4517	17.4517	0.0000	0.0000	0.0000
2.16	19.5665	18.4830	18.1800	17.9690	1.1740	1.9224	2.5520
6.75	21.6357	19.9950	19.4860	19.0050	2.6919	4.6213	6.9207
10.75	21.7500	20.4120	20.1240	19.7010	1.7902	2.6439	4.1984
18.7.5	21.500	20.5130	20.5800	20.6310	0.9742	0.8464	0.7552
33.75	22.1200	22.1200	22.1200	22.1200	0.0000	0.0000	0.0000
$v_{0,x,1} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m/s} ; T_3 = 20.5^\circ\text{C}$				Ψ_b	6.6303	10.0339	14.4162

Tabla 6.3.6. Resultados parciales del problema inverso para una velocidad de $3 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$ y una temperatura de entra del agua subterránea de 20.5°C

Sondeo Séneca 5		T (°C)			$[(T - y)_{x_b,i} - (T - y)_{x_i}]^2$		
y (m)	T (°C)	x = 35.63 m	x = 73 m	x = 148 m	x = 35.63 m	x = 73 m	x = 148 m
0	17.4517	17.4517	17.4517	17.4517	0.0000	0.0000	0.0000
2.16	19.5665	19.2000	18.7330	19.3740	0.1343	0.6947	1.4221
6.75	21.6357	20.4620	20.2620	19.8440	1.3776	1.8871	3.2102
10.75	21.7500	20.5000	20.4840	20.3500	1.5625	1.6028	1.9600
18.7.5	21.500	20.5000	20.5010	20.5260	1.0000	0.9980	0.9487
33.75	22.1200	22.1200	22.1200	22.1200	0.0000	0.0000	0.0000
$v_{0,x,1} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} ; T_3 = 20.5^\circ\text{C}$				Ψ_b	4.0744	5.1823	7.5410
$\Psi_{a,I} = 0.0054 ; x_{b,I} = 554.63 \text{ m}$							

Tabla 6.3.7. Resultados parciales del problema inverso para una velocidad de $1 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$ y una temperatura de entra del agua subterránea de 20.5°C

Sondeo Séneca 5		T (°C)			$[(T - y)_{x_b,i} - (T - y)_{x_i}]^2$		
y (m)	T (°C)	x = 35.63 m	x = 73 m	x = 148 m	x = 35.63 m	x = 73 m	x = 148 m
0	17.4517	17.4517	17.4517	17.4517	0.0000	0.0000	0.0000
2.16	19.5665	18.0500	17.8800	17.7890	2.2998	2.8443	3.1595
6.75	21.6357	19.2650	18.7930	18.5250	5.6203	8.0810	9.6765
10.75	21.7500	20.1090	19.5140	19.1430	2.6929	4.9997	6.7964
18.7.5	21.500	21.2080	20.7350	20.3410	0.0853	0.5852	1.343
33.75	22.1200	22.1200	22.1200	22.1200	0.0000	0.0000	0.0000
$v_{0,x,1} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m/s} ; T_3 = 21.5^\circ$				Ψ_b	10.6982	16.5102	20.9758

Tabla 6.3.8. Resultados parciales del problema inverso para una velocidad de $5 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$ y una temperatura de entra del agua subterránea de 21.5°C

Sondeo Séneca 5		T (°C)			$[(T - y)_{x_b,i} - (T - y)_{x_i}]^2$		
y (m)	T (°C)	x = 35.63 m	x = 73 m	x = 148 m	x = 35.63 m	x = 73 m	x = 148 m
0	17.4517	17.4517	17.4517	17.4517	0.0000	0.0000	0.0000
2.16	19.5665	18.8820	18.4190	19.1360	0.4685	1.3168	2.0463
6.75	21.6357	20.8300	20.1530	19.4970	0.6492	2.1984	4.5741
10.75	21.7500	21.3830	20.9970	20.3860	0.1347	0.5670	1.8605
18.7.5	21.500	21.5050	21.5090	21.3810	0.0000	0.0001	0.0142
33.75	22.1200	22.1200	22.1200	22.1200	0.0000	0.0000	0.0000
$v_{0,x,1} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m/s} ; T_3 = 21.5^\circ$				Ψ_b	1.2524	4.0823	8.4951

Tabla 6.3.9. Resultados parciales del problema inverso para una velocidad de $3 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$ y una temperatura de entra del agua subterránea de 21.5°C

Sondeo Séneca 5		T (°C)			$[(T - y)_{x_b,i} - (T - y)_{x_i}]^2$		
y (m)	T (°C)	x = 65.63 m	x = 80.63 m	x = 84.38 m	x = 65.63 m	x = 80.63 m	x = 84.38 m
0	17.4517	17.4517	17.4517	17.4517	0.0000	0.0000	0.0000
2.16	19.5665	19.8480	19.6560	19.6140	0.0792	0.0080	0.0023
6.75	21.6357	21.4630	21.4260	21.4160	0.0298	0.0440	0.0483
10.75	21.7500	21.5000	21.5000	21.5000	0.0625	0.0625	0.0625
18.7.5	21.500	21.5000	21.5000	21.5000	0.0000	0.0000	0.0000
33.75	22.1200	22.1200	22.1200	22.1200	0.0000	0.0000	0.0000
$v_{0,x,1} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}; T_3 = 21.5^\circ$ $\Psi_{a,I} = 0.9689; x_{b,I} = 603.38 \text{ m}$				Ψ_b	0.1716	0.1145	0.1130

Tabla 6.3.10. Resultados parciales del problema inverso para una velocidad de $2 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$ y una temperatura de entra del agua subterránea de 21.5°C

Sondeo Séneca 5		T (°C)			$[(T - y)_{x_b,i} - (T - y)_{x_i}]^2$		
y (m)	T (°C)	x = 31.88 m	x = 35.63 m	x = 39.38 m	x = 31.88 m	x = 35.63 m	x = 39.38 m
0	17.4517	17.4517	17.4517	17.4517	0.0000	0.0000	0.0000
2.16	19.5665	19.8790	19.7740	19.6810	0.0977	0.0431	0.0131
6.75	21.6357	21.4670	21.4500	21.4310	0.0285	0.0345	0.0419
10.75	21.7500	21.5000	21.5000	21.4990	0.0625	0.0625	0.0630
18.7.5	21.500	21.5000	21.5000	21.5000	0.0000	0.0000	0.0000
33.75	22.1200	22.1200	22.1200	22.1200	0.0000	0.0000	0.0000
$v_{0,x,1} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}; T_3 = 21.5^\circ$ $\Psi_{a,I} = 0.1537; x_{b,I} = 558.38 \text{ m}$				Ψ_b	0.1886	0.1400	0.1180

Tabla 6.3.11. Resultados parciales del problema inverso para una velocidad de $1 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$ y una temperatura de entra del agua subterránea de 21.5°C

Los resultados indican que el valor de la velocidad horizontal del flujo de agua subterránea es de 10^{-5} m/s y que el valor de la temperatura de entrada del agua subterránea es de 21.5°C . Para la estimación del caudal total de descarga desde el acuífero del Mar Menor hacia la laguna

salada, sería necesario realizar el mismo procedimiento en diferentes localizaciones correctamente distribuidas en el Campo de Cartagena para, a partir de las velocidades, calcular el caudal de descarga.

Conclusiones

Como contribución al desarrollo de esta memoria se han recopilado, tras la realización de un estudio exhaustivo, los trabajos relacionados con la estimación del flujo de agua subterránea a partir de perfiles de temperatura-profundidad, incidiendo en aspectos teóricos relaciones con: a) los modelos físico y matemático, b) la definición de escenarios patrones, c) el importante papel que juegan los grupos adimensionales en las soluciones de los diferentes problemas y, d) el planteamiento de protocolos de problema inverso. Las diferentes publicaciones han sido clasificadas, en primer lugar, en función de las condiciones de contorno de temperatura, en especial, de la temperatura en la superficie del terreno, destacando la variación armónica de tipo sinusoidal y la opción de temperatura constante. Por otra parte, los trabajos han sido organizados en función de si los modelos eran unidimensionales (fundamentalmente flujo vertical de agua subterránea), bidimensionales o tridimensionales. En términos generales, respecto a la caracterización dimensional, los autores admiten la existencia de grupos (normalmente) adimensionales y generalmente clásicos, formados por agrupaciones de parámetros físicos de todo tipo que tienen un papel decisivo en la búsqueda de soluciones de cualquier problema.

Se han diseñado los modelos necesarios para la simulación de los distintos escenarios estudiados: i) escenario de flujo vertical unidimensional (ascendente y descendente), ii) flujo horizontal en acuíferos saturados, iii) flujo horizontal a través de una capa permeable situada entre dos

Conclusiones

regiones impermeables, iv) flujo oblicuo de velocidad constante, v) escenarios en los cuales los potenciales hidráulicos son constantes en las fronteras del dominio y, vi) escenarios de interacción río acuífero.

Para la deducción de los grupos adimensionales, en todos los escenarios investigados, se ha seguido la técnica de adimensionalización discriminada y normalizada de las ecuaciones de gobierno que integran el modelo matemático, mientras que las simulaciones numéricas necesarias de los modelos en red diseñados, tanto para ilustrar como para representar gráficamente las soluciones universales (en la forma de curvas, ábacos y superficies universales), se han llevado a cabo mediante el programa Pspice y el software libre Ngspice. Además, muchas de estas simulaciones han sido verificadas haciendo uso de los programas comerciales MT3DMS y MODFLOW.

Las contribuciones y conclusiones más importantes en relación a los escenarios investigados son las siguientes:

Escenarios de flujo vertical

En el escenario de flujo vertical unidimensional se han deducido, en primer lugar, los grupos adimensionales que rigen las soluciones de los perfiles verticales temperatura-profundidad en problemas en los cuales la temperatura en la superficie del terreno es constante o presenta variación armónica de tipo sinusoidal mientras que la temperatura en el fondo del dominio es de valor constante. Se han verificado mediante simulaciones numéricas un conjunto de casos completo e ilustrativo.

Hemos dado significado físico al monomio π_1 (balance entre los efectos o términos de difusión y advección, con un coeficiente de difusividad que corrige el de la matriz del suelo saturado) e introducido una longitud característica denominada $l_{\text{dif-adv}}^*$ para la cual los efectos de conducción y advección influyen más o menos por igual durante el tiempo $\tau_{\text{dif-adv}}^*$, que también es una magnitud característica oculta. Tanto $l_{\text{dif-adv}}^*$ como $\tau_{\text{dif-adv}}^*$ tienen significados físicos claros y su forma adimensional pueden expresarse en función de los grupos adimensionales del problema (teorema de pi).

Para la condición de temperatura constante en la superficie del terreno (también llamada temperatura en escalón), la solución aportada por los autores Bredehoeft y Papadopoulos [1965] ha sido corregida formalmente (mediante la técnica de adimensionalización de ecuaciones) con la relación entre calores específicos del agua y de la matriz porosa de suelo saturado. Además, se ha deducido el tiempo característico de duración del transitorio y el ábaco universal de perfiles de temperatura para ese período. Por tanto, además de corregir la solución estacionaria

Conclusiones

de Bredehoeft y Papadopulos, la presente memoria de tesis aporta una solución para el transitorio, así como su representación gráfica que puede ser usada de manera directa (sin necesidad de simulaciones numéricas) en protocolos de problema inverso para la determinación de la velocidad de flujo. Estas soluciones son aplicables tanto para el caso de temperatura armónica en superficie (siempre que se refieran a la temperatura media del ciclo) como para el caso de temperatura constante en la superficie.

Para la condición de variación sinusoidal de la temperatura en la superficie del terreno, independientemente del valor de la temperatura en el fondo del acuífero, se distingue entre acuíferos profundos y acuíferos superficiales desde el punto de vista térmico. Hasta hoy, la mayor parte de autores diferencia los acuíferos profundos de los superficiales teniendo en cuenta sólo la geometría del acuífero (su profundidad). La distinción desde el punto de vista térmico, aportación científica de esta memoria, se lleva a cabo una longitud o profundidad característica vertical (magnitud oculta) cuya dependencia con los grupos es deducida y representada en forma de gráfico universal. Esta longitud define la extensión del acuífero donde la onda armónica (su amplitud) de temperatura es aún apreciable.

Para flujos verticales nulos, la forma adimensional de las desviaciones máximas de temperatura en acuíferos profundos depende únicamente de la posición relativa respecto de la longitud característica (anterior) introducida en el problema. Sin embargo, en acuíferos superficiales, la forma dimensional de las desviaciones máximas de temperatura depende tanto de la posición relativa con respecto a H como del grupo adimensional $\frac{H^2}{\alpha\tau_0}$.

En escenarios del flujo vertical no nulo se han deducido las dependencias y expresiones universales para la amplitud de la oscilación térmica en el terreno, tanto para flujos ascendentes como descendentes. Dentro de esto escenarios, para acuíferos superficiales, se han deducido los tres grupos adimensionales de los que depende la amplitud de la oscilación térmica y se han representado un conjunto de las curvas universales de esta dependencia.

La aplicación más directa de los resultados obtenidos en el estudio de escenarios de flujo vertical, particularmente de las curvas y ábacos universales derivados de sus soluciones, es su uso para la estimación de flujos (velocidades) y/o propiedades térmicas del acuífero bajo la forma de problema inverso. Para cada uno de los escenarios se explica el procedimiento o protocolo adecuado para esta estimación demostrando su eficacia y precisión mediante diferentes ejemplos. En general, el trabajo con perfiles de temperatura media proporciona una estimación precisa de los caudales conociendo las propiedades térmicas del suelo, mientras que el trabajo con amplitudes de oscilación de la onda armónica permite estimar simultáneamente

Conclusiones

la velocidad del fluido y las propiedades térmicas de la matriz porosa, e incluso la profundidad en el caso de acuíferos poco profundos.

Flujo horizontal en acuíferos saturados

En esta aplicación se han deducido los grupos adimensionales que rigen la solución o soluciones del problema acoplado de flujo simultáneo de calor y de fluido en medios porosos saturados en el cual la temperatura en la superficie del terreno puede ser armónica de tipo sinusoidal o constante y la velocidad de flujo es horizontal y de valor constante en todo punto del dominio. Una vez obtenidos los grupos adimensionales, su verificación se confirma mediante simulaciones numéricas en un número significativo de escenarios en los cuales uno o más parámetros del problema se modifican reteniendo el mismo valor numérico del monomio. La emergencia de una longitud característica horizontal, cuya expresión adimensional como cabe esperar depende de los grupos adimensionales que rigen la solución del problema, permite caracterizar los perfiles dentro de la región delimitada por la longitud característica, como una función de la posición relativa respecto a dicha longitud.

Para obtener la temperatura adimensional en cualquier punto del dominio, se genera un nuevo grupo adimensional que se deduce de forma natural de las tres temperaturas del contorno (superficie del terreno, fondo del dominio y borde izquierdo).

Finalmente, una de las contribuciones más relevantes es la referente a la demostración de que los gradientes térmicos horizontales en ningún caso son constantes, hipótesis asumida por los trabajos científicos de la literatura en estos escenarios. Estos gradientes son, en realidad, muy cambiantes en una determinada longitud, hasta llegar a tener un valor nulo más allá de la misma.

En base a los resultados anteriores, particularmente en el hecho de que los perfiles estacionarios de temperatura solo dependen de la posición relativa dentro de la región característica horizontal, se propone un protocolo de problema inverso clásico mediante simulaciones numéricas. Este protocolo permite la estimación del caudal de agua subterránea a partir de la medida experimental de un conjunto de temperaturas distribuidas a lo largo de diferentes columnas. El ejemplo de aplicación ilustrativo demuestra la convergencia de las soluciones hacia valores muy precisos, justificando así la eficiencia y la precisión del método.

Flujo horizontal en capa permeable

Se ha estudiado un escenario bidimensional en el cual el calor se transfiere desde una capa subterránea, horizontal, estrecha y permeable hacia el terreno circundante (dos regiones impermeables que rodean a dicha capa) o viceversa. Se han obtenido las dependencias de las incógnitas más relevantes y de mayor interés con los parámetros físicos y geométricos

Conclusiones

involucrados y se han representado dichas dependencias mediante curvas universales. Tales curvas son utilizadas en protocolos de problema inverso para la estimación de la velocidad horizontal del agua subterránea a través de la capa permeable, a partir de mediciones de temperatura en terreno. En este estudio se asume que el espesor de la capa permeable es despreciable en comparación con los espesores de las regiones impermeables.

La introducción de, por un lado, una longitud característica horizontal (a lo largo de la cual se desarrollan los perfiles verticales de temperatura) para adimensionalizar la coordenada horizontal y, por otro, de un tiempo característico que marca la duración del período transitorio para adimensionalizar el tiempo, permiten la estimación directa de las dependencias de las formas adimensionales de estas dos incógnitas (tiempo y longitud característicos) con el resto de grupos del problema.

Una vez verificadas todas las dependencias deducidas, se representan mediante curvas universales que pueden utilizarse para la solución de cualquier escenario de forma sencilla. Finalmente, se establecen dos protocolos de problema inverso para la estimación de la velocidad horizontal del flujo de agua subterránea, uno a partir de medidas de temperatura en el estado estacionario y otro a partir de medidas en el transitorio. Una aplicación ilustrativa demuestra la eficiencia y la precisión de los protocolos propuestos.

Flujo oblicuo

Se han estudiado dos escenarios en los cuales la velocidad del flujo de agua subterránea es oblicua. En el primero, la velocidad del flujo es de valor constante (ambas componentes) y la temperatura presenta un valor constante en la superficie del terreno, así como en las fronteras de entrada del fluido. La extensión del acuífero es lo suficientemente larga como para que la condición de contorno de la temperatura en el borde derecho del dominio no influya en los patrones térmicos dentro de la región característica de desarrollo de los perfiles verticales de temperatura. En esta región característica, los perfiles de temperatura dependen de las componentes vertical y horizontal de la velocidad del flujo. Más allá de esta región, los perfiles verticales de temperatura únicamente dependerán de la componente vertical del flujo y serán independientes de la posición horizontal. En el estudio llevado a cabo se han determinado los grupos adimensionales de los que depende el valor de la longitud característica y se han representado en forma de curvas universales las dependencias obtenidas que, podrán ser utilizadas para la estimación de las componentes de la velocidad oblicua del agua subterránea.

En el segundo escenario, en las fronteras que delimitan el dominio se han impuesto condiciones de potencial hidráulico constante y, además, el acuífero presenta anisotropía en su

Conclusiones

permeabilidad hidráulica. Se mantienen las mismas condiciones térmicas de contorno del caso de flujo oblicuo de velocidad constante. Debido a que el flujo se genera por las condiciones de potencial hidráulico del contorno, la velocidad de flujo no es constante en cada punto del medio poroso y se va desarrollando gradualmente dentro de una región más allá de la cual, el flujo horizontal se hace nulo. Se ha determinado la extensión de los perfiles de potencial hidráulico y su dependencia en los parámetros mecánicos del problema para, posteriormente, determinar los grupos adimensionales de los que depende el campo de temperaturas.

Finalmente, para el escenario de flujo oblicuo de velocidad constante se propone un protocolo de problema inverso que combina el uso de representaciones universales (ábacos) para la estimación de la componente vertical del flujo y de simulaciones numéricas (problema inverso clásico) para la estimación de la componente horizontal. También se propone un segundo protocolo en el cual se prescinde de las simulaciones numéricas para determinar la componente horizontal haciendo uso de ábacos universales. Dicho protocolo ha sido verificado a partir de un ejemplo de aplicación.

Interacción río-acuífero

Se ha investigado un escenario en el cual se produce recarga desde un río a un acuífero o descarga desde dicho acuífero a río. El fondo del acuífero es impermeable y el flujo se produce debido a la diferencia de potenciales existente entre el río y el borde de salida de agua subterránea (límite derecho del acuífero). Debido a la impermeabilidad impuesta en el fondo del dominio, el flujo será oblicuo y de valor no constante a lo largo de una región horizontal en la cual la componente vertical irá perdiendo importancia frente a la componente horizontal. Más allá de esta región definida a partir de una longitud característica hidráulica, la velocidad vertical será despreciable.

En este escenario, se puede desacoplar el problema hidráulico del problema térmico. Por lo tanto, el caudal adimensional, los potenciales hidráulicos adimensionales y el valor de la longitud característica horizontal hidráulica no dependen de las temperaturas en las fronteras del dominio, tan sólo de la geometría del escenario, de las componentes horizontal y vertical de la permeabilidad y del valor de los potenciales hidráulicos en las fronteras del dominio. Sin embargo, los patrones de temperatura, además de depender de las condiciones térmicas y mecánicas en los contornos, dependerán de las propiedades térmicas e hidráulicas del medio, de la geometría y de la posición.

Se han determinado los grupos adimensionales que rigen las soluciones del problema hidráulico y del problema térmico. Las dependencias obtenidas han sido verificadas por medio de

Conclusiones

simulaciones numéricas precisas y, posteriormente, representadas gráficamente en forma de curvas, ábacos y superficies universales que podrán ser utilizadas en la propuesta de protocolos de problema inverso.

Finalmente, se propone para este escenario un protocolo de problema inverso que hace uso tanto de superficies universales, como de un ábaco universal para la estimación de las componentes de la permeabilidad y del caudal de descarga o de recarga. Dicho protocolo ha sido igualmente verificado mediante un ejemplo de aplicación.

Aplicación en el entorno del Mar Menor

Por último, el protocolo de problema inverso clásico propuesto para el caso de flujo horizontal ha sido aplicado en una zona del entorno del Mar Menor situada en Los Alcázares, estimándose tanto la velocidad horizontal del agua subterránea como la temperatura de entrada del agua subterránea.

Conclusions

As a contribution to the development of this report, after carrying out an exhaustive study, the works related to the estimation of groundwater flow from temperature-depth profiles have been compiled, focusing on theoretical aspects related to: a) physical and mathematical models, b) the definition of pattern scenarios, c) the important role played by dimensionless groups in the solutions of different problems and, d) the approach of inverse problem protocols. The different publications have been classified, in the first place, according to the temperature boundary conditions, especially the temperature on the ground surface, highlighting the harmonic variation of sinusoidal type and the constant temperature condition. On the other hand, publications have been organized according to whether models were one-dimensional (mainly vertical groundwater flow), two-dimensional or three-dimensional. In general terms, regarding the dimensional characterization, authors admit the existence of dimensionless and generally classical groups, formed by groups of physical parameters of all kinds that have a decisive role in the search for solutions to any problem.

The necessary models have been designed to simulate the different scenarios studied: i) one-dimensional vertical flow scenario (upward and downward), ii) horizontal flow in saturated aquifers, iii) horizontal flow through a permeable layer located between two impermeable regions, iv) constant velocity oblique flow, v) scenarios in which hydraulic potentials are constant at the domain boundaries and, vi) river-aquifer interaction scenarios.

Conclusions

For the deduction of dimensionless groups, in all the investigated scenarios, the discriminated and normalized dimensionless technique of the governing equations that make up the mathematical model has been followed, while the necessary numerical simulations of the network models designed, both to illustrate and to graphically represent universal solutions (in the form of curves, abaci and universal surfaces), have been carried out using Pspice and the free software Ngspice. Furthermore, many of these simulations have been verified using the commercial programs MT3DMS and MODFLOW.

The most important contributions and conclusions in relation to the investigated scenarios are the following:

Vertical flow scenarios

In the one-dimensional vertical flow scenario, first of all, the dimensionless groups that govern the solutions of the vertical temperature-depth profiles in problems in which temperature on the ground surface is constant or presents sinusoidal harmonic variation, while temperature at the bottom of the domain is of constant value, have been deduced. A complete and illustrative set of cases have been verified by numerical simulations.

We have given physical meaning to the monomial π_1 (balance between diffusion and advection effects or terms, with a diffusivity coefficient that corrects that of the saturated soil matrix) and introduced a characteristic length called $l_{\text{dif-adv}}^*$ for which the effects of conduction and advection influence more or less equally during the time $\tau_{\text{dif-adv}}^*$, which is also a hidden characteristic magnitude. Both $l_{\text{dif-adv}}^*$ and $\tau_{\text{dif-adv}}^*$ have clear physical meanings and their dimensionless form can be expressed in terms of the dimensionless groups of the problem (π theorem).

For constant temperature condition at the ground surface, the solution provided by Bredehoeft and Papadopulos [1965] has been formally corrected (by means of the non-dimensionalization technique of equations) with the relationship between specific heats of water and the porous matrix of saturated soil. In addition, the characteristic duration time of the transient and the universal abacus of temperature-depth profiles for that period have been deduced. Therefore, in addition to correcting the Bredehoeft and Papadopulos steady-state solution, this thesis report provides a solution for the transient, as well as its graphic representation that can be used directly (without the need for numerical simulations) in inverse problem protocols. for determining the flow rate. These solutions are applicable both for the case of harmonic surface temperature (as long as they refer to the mean temperature of the cycle) and for the case of constant surface temperature.

Conclusions

For sinusoidal variation of the temperature on the ground surface, regardless of the value of temperature at the bottom of the aquifer, a distinction is made between deep and shallow aquifers from the thermal point of view. Until today, most authors differentiate between deep and shallow aquifers, taking into account only the geometry of the aquifer (its depth). The distinction from the thermal point of view, scientific contribution of this memory, is carried out by a characteristic vertical length or depth (hidden magnitude) whose dependence on the groups is deduced and represented in the form of a universal graph. This length defines the extension of the aquifer where the harmonic wave (its amplitude) of temperature is still appreciable.

For zero vertical flows, the dimensionless shape of the maximum temperature deviations in deep aquifers depends only on the relative position to the (previous) characteristic length introduced into the problem. However, in shallow aquifers, the dimensional shape of the maximum temperature deviations depends both on the relative position with respect to H and on the dimensionless group $\frac{H^2}{\alpha\tau_0}$.

In non-zero vertical flow scenarios, dependencies and universal expressions have been deduced for the amplitude of the thermal oscillation in the aquifer, both for upward and downward flows. Within these scenarios, for shallow aquifers, three dimensionless groups on which the amplitude of the thermal oscillation depends have been deduced and a set of universal curves of this dependence have been depicted.

The most direct application of the results obtained in the study of vertical flow scenarios, particularly of the universal curves and abacuses derived from their solutions, is their use for the estimation of flows (velocities) and/or thermal properties of the aquifer in the form inverse problem. For each scenario, the appropriate procedure or protocol for this estimation is explained, demonstrating its effectiveness and precision through different examples. In general, the work with average temperature-depth profiles provides an accurate estimation of the flows knowing the thermal properties of the aquifer, while the work with oscillation amplitudes of the harmonic wave allows simultaneously estimating the fluid velocity and the thermal properties of the porous media, and even depth in the case of shallow aquifers.

Horizontal flow in saturated aquifers

In this application, the dimensionless groups that govern the solution or solutions of the coupled problem of simultaneous flow of heat and fluid in saturated porous media have been deduced in which temperature on the ground surface can be sinusoidal or constant and the flow velocity is horizontal and of constant value at every point of the domain. Once the dimensionless groups

Conclusions

have been obtained, their verification is confirmed by numerical simulations in a significant number of scenarios in which one or more parameters of the problem are modified, retaining the same numerical value of the monomial. The emergence of a horizontal characteristic length, whose dimensionless expression, as expected, depends on the dimensionless groups that govern the solution of the problem, allows us to characterize the profiles within the region delimited by the characteristic length.

To obtain the dimensionless temperature at any point in the domain, a new dimensionless group is generated that is deduced from the three boundary temperatures (ground surface, bottom of the aquifer, and left edge).

Finally, one of the most relevant contributions is the one referring to the demonstration that horizontal thermal gradients are in no case constant, a hypothesis assumed by the scientific works in the literature in these scenarios. These gradients are, in fact, very changeable in a certain length, until reaching a null value beyond it.

Based on this results, particularly on the fact that the steady-state temperature-depth profiles only depend on the relative position within the horizontal characteristic region, a classical inverse problem protocol is proposed by means of numerical simulations. This protocol allows the estimation of groundwater flow from experimental measurement of a set of temperatures distributed along different columns. The illustrative application example demonstrates the convergence of the solutions to very precise values, thus justifying the efficiency and accuracy of the method.

Horizontal flow through a permeable layer

A two-dimensional scenario has been studied in which heat is transferred from a horizontal, narrow and permeable underground layer to the surrounding soil (two impermeable regions) or vice versa. The dependencies of the most relevant and most interesting unknowns with the physical and geometric parameters involved have been obtained and these dependencies have been represented by means of universal curves. Such curves are used in inverse problem protocols to estimate the horizontal groundwater velocity through the permeable layer, from temperature measurements. In this study it is assumed that the thickness of the permeable layer is negligible compared to the thickness of the impermeable regions.

The introduction of, on the one hand, a characteristic horizontal length (along which vertical temperature profiles are developed) to non-dimensionalize the horizontal coordinate and, on the other hand, a characteristic time that marks the duration of the transitory period to non-

Conclusions

dimensionalize time, allow direct estimation of the dependencies of dimensionless shapes of these two unknowns (characteristic time and length) with the rest of the problem groups.

Once all the deduced dependencies have been verified, they are represented by universal curves that can be used to solve any scenario in a simple way. Finally, two inverse problem protocols are established for estimating the horizontal groundwater velocity, one based on temperature measurements in the steady-state and the other based on transient measurements. An illustrative application demonstrates the efficiency and accuracy of the proposed protocols.

Oblique flow

Two scenarios have been studied in which groundwater flow velocity is oblique. In the first, groundwater velocity is of a constant value (both components) and the temperature has a constant value at the ground surface, as well as at the entrance borders of the fluid. The extent of the aquifer is long enough that temperature boundary condition at the right edge of the domain does not influence thermal patterns within the characteristic region of development of temperature-depth profiles. In this characteristic region, temperature profiles depend on the vertical and horizontal components of the flow velocity. Beyond this region, the vertical temperature profiles will only depend on the vertical component and will be independent of the horizontal position. In the study carried out, the dimensionless groups on which the value of the characteristic length depends have been determined and the dependencies obtained have been depicted in the form of universal curves, which may be used to estimate the components of the oblique groundwater flow velocity.

In the second scenario, conditions of constant hydraulic potential have been imposed on the borders that delimit the domain and, in addition, the aquifer presents anisotropy in its hydraulic permeability. The same thermal boundary conditions of the oblique constant velocity flow case are maintained. Because the flow is generated by the hydraulic potential conditions at the boundaries, flow velocity is not constant at each point of the porous media and gradually develops within a region beyond which the horizontal flow becomes null. The extension of the hydraulic potential profiles and their dependence on mechanical parameters of the problem have been determined to subsequently determine the dimensionless groups on which the temperature field depends.

Finally, for the constant velocity oblique flow scenario, an inverse problem protocol is proposed that combines the use of universal representations for the estimation of the vertical component of the flow and numerical simulations (classical inverse problem) for the estimation of the horizontal component. A second protocol is also proposed in which numerical simulations are

Conclusions

dispensed with to determine the horizontal component using universal abacus. This protocol has been verified from an application example.

River-aquifer interaction

A scenario in which there is recharge from a river to an aquifer or discharge from the aquifer to a river has been investigated. The bottom of the aquifer is impermeable and the flow occurs due to hydraulic potential difference between the river and the edge of the groundwater outlet (right limit of the aquifer). Due to the impermeability imposed at the bottom of the domain, the flow will be oblique and of non-constant value along a horizontal region in which the vertical component will lose importance compared to the horizontal component. Beyond this region defined from a hydraulic characteristic length, the vertical velocity will be negligible.

In this scenario, the hydraulic problem can be decoupled from the thermal problem. Therefore, dimensionless flow, dimensionless hydraulic potentials and the value of the hydraulic horizontal characteristic length do not depend on temperatures at the domain boundaries, only on the geometry of the scenario, on the horizontal and vertical components of permeability and of the value of hydraulic potentials in the borders of the domain. However, temperature patterns, in addition to depending on the thermal and mechanical conditions at the boundaries, will depend on the thermal and hydraulic properties of the medium, geometry and position.

The dimensionless groups that govern the solutions of the hydraulic problem and the thermal problem have been determined. The dependencies obtained have been verified by means of precise numerical simulations and, subsequently, graphically depicted in the form of curves, abacus and universal surfaces that can be used in the proposal of inverse problem protocols.

Finally, an inverse problem protocol is proposed for this scenario that makes use of both universal surfaces and a universal abacus to estimate the components of permeability and discharge or recharge flow. This protocol has also been verified by means of an application example.

Application in Mar Menor aquifer

Finally, the classic inverse problem protocol proposed for the case of horizontal flow has been applied in an area around Mar Menor aquifer located in Los Alcázares, estimating both the horizontal velocity of groundwater and the groundwater inlet temperature.

Referencias bibliográficas

Referencias bibliográficas

- Alhama, F., & Madrid, C. N. (2012). Análisis dimensional discriminado. *Aplicación a problemas avanzados de dinámica de fluidos y transferencia de calor*. Ed. Reverté, Barcelona.
- Alhama, I., Cánovas, M., & Alhama, F. (2014). On the nondimensionalization process in complex problems: application to natural convection in anisotropic porous media. *Mathematical problems in engineering*, 2014.
- Anderson, M. P. (2005). Heat as a ground water tracer. *Groundwater*, 43(6), 951-968.
- Andrews, C. B. (1978). The impact of the use of heat pumps on ground-water temperatures. *Groundwater*, 16(6), 437-443.
- Andrews, C. B., & Anderson, M. P. (1979). Thermal alteration of groundwater caused by seepage from a cooling lake. *Water Resources Research*, 15(3), 595-602.
- Aragón, R., Rodríguez Estrella, T., & Mora, V. (1988). Intrusión marina fósil en el Campo de Cartagena (Murcia). In *Tecnología de la intrusión en acuíferos costeros* (pp. 221-236).
- Bair, E. S., & Parizek, R. R. (1978). Detection of permeability variations by a shallow geothermal technique. *Groundwater*, 16(4), 254-263.
- Bartolino, J. R., & Niswonger, R. G. (1999). *Numerical simulation of vertical ground-water flux of the Rio Grande from ground-water temperature profiles, central New Mexico* (Vol. 99, No. 4212). US Department of the Interior, US Geological Survey.
- Beck, J. V. (1970). Nonlinear estimation applied to the nonlinear inverse heat conduction problem. *International Journal of heat and mass transfer*, 13(4), 703-716.
- Becker, M. W., Georgian, T., Ambrose, H., Siniscalchi, J., & Fredrick, K. (2004). Estimating flow and flux of ground water discharge using water temperature and velocity. *Journal of Hydrology*, 296(1-4), 221-233.
- Bejan, A. (2013). *Convection heat transfer*. John Wiley & Sons.
- Beltrami, H., & Harris, R. N. (2001). Foreword: Inference of climate change from geothermal data. *Global and Planetary Change*, 29(3), 149-152.
- Bendjoudi, H., Cheviron, B., Guérin, R., & Tabbagh, A. (2005). Determination of upward/downward groundwater fluxes using transient variations of soil profile temperature: test of the method with Voyons (Aube, France) experimental data. *Hydrological Processes: An International Journal*, 19(18), 3735-3745.

Referencias bibliográficas

- Betcher, R. N. (1977). *Temperature distributions in deep groundwater flow systems-a finite element model* (Doctoral dissertation).
- Birch, F. (1948). The effects of Pleistocene climatic variations upon geothermal gradients. *American Journal of Science*, 246, 729-760.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lightfoot, E. N. *Transport phenomena*, New York (1960).
- Birman, J. H. (1969). Geothermal exploration for ground water. *Geological Society of America Bulletin*, 80(4), 617-630.
- Blackwell, D. D., Bowen, R. G., Hull, D. A., Riccio, J., & Steele, J. L. (1982). Heat flow, arc volcanism, and subduction in northern Oregon. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 87(B10), 8735-8754.
- Blasch, K. W., Ferré, T. P., & Hoffmann, J. P. (2004). A statistical technique for interpreting streamflow timing using streambed sediment thermographs. *Vadose Zone Journal*, 3(3), 936-946.
- Bodvarsson, G. (1969). On the temperature of water flowing through fractures. *Journal of Geophysical Research*, 74(8), 1987-1992.
- Bodvarsson, G. (1973). Temperature inversions in geothermal systems. *Geoexploration*, 11(1-3), 141-149.
- Bodvarsson, G. S., Miller, C. W., & Benson, S. M. (1981). Simple model for fault-charged hydrothermal systems. *NASA STI/Recon Technical Report N*, 82, 31789.
- Bouyoucos, G. J. (1915). Effect of temperature on movement of water vapor and capillary moisture in soils.
- Boyle, J. M., & Saleem, Z. A. (1979). Determination of recharge rates using temperature-depth profiles in wells. *Water Resources Research*, 15(6), 1616-1622.
- Bravo, H. R., Jiang, F., & Hunt, R. J. (2002). Using groundwater temperature data to constrain parameter estimation in a groundwater flow model of a wetland system. *Water Resources Research*, 38(8), 28-1.
- Bredehoeft, J. D., & Papaopulos, I. S. (1965). Rates of vertical groundwater movement estimated from the Earth's thermal profile. *Water Resources Research*, 1(2), 325-328.

Referencias bibliográficas

- Brott, C. A., Blackwell, D. D., & Ziagos, J. P. (1981). Thermal and tectonic implications of heat flow in the eastern Snake River Plain, Idaho. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 86(B12), 11709-11734.
- Brown, L. E., Milner, A. M., & Hannah, D. M. (2007). Groundwater influence on alpine stream ecosystems. *Freshwater Biology*, 52(5), 878-890.
- Brunke, M., & Gonser, T. O. M. (1997). The ecological significance of exchange processes between rivers and groundwater. *Freshwater biology*, 37(1), 1-33.
- Brunke, M., Hoehn, E., & Gonser, T. (2003). Patchiness of river-groundwater interactions within two floodplain landscapes and diversity of aquatic invertebrate communities. *Ecosystems*, 6(8), 707-722.
- Buckingham, E. (1914). On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Physical review*, 4(4), 345.
- Bullard, E. C. (1939). Heat flow in South Africa. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 173(955), 474-502.
- Byrne, G. F., Drummond, J. E., & Rose, C. W. (1967). A sensor for water flux in soil. "Point source" instrument. *Water Resources Research*, 3(4), 1073-1078.
- Calvache, M. L., Duque, C., Fontalva, J. M., & Crespo, F. (2011). Processes affecting groundwater temperature patterns in a coastal aquifer. *International Journal of Environmental Science & Technology*, 8(2), 223-236.
- Cánovas Vidal, M., Alhama López, F., Alhama Manteca, I., & Alcaraz Aparicio, M. (2012). El método de simulación por redes (MESIR) como herramienta para la investigación.
- Cánovas, M., Alhama, I., & Alhama, F. (2015). Mathematical characterization of Bénard-type geothermal scenarios using discriminated non-dimensionalization of the governing equations. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 16(1), 23-34.
- Cánovas, M., Alhama, I., Trigueros, E., & Alhama, F. (2016). A review of classical dimensionless numbers for the Yusa problem based on discriminated non-dimensionalization of the governing equations. *Hydrological Processes*, 30(22), 4101-4112.
- Carslaw, H. S., & Jaeger, J. C. (1959). *Conduction of heat in solids* (No. 536.23). Clarendon press.
- Cartwright, K. (1968). Temperature prospecting for shallow glacial and alluvial aquifers in Illinois. *Circular no. 433*.

Referencias bibliográficas

- Cartwright, K. (1970). Groundwater discharge in the Illinois Basin as suggested by temperature anomalies. *Water Resources Research*, 6(3), 912-918.
- Cartwright, K. (1971). Redistribution of geothermal heat by a shallow aquifer. *Geological Society of America Bulletin*, 82(11), 3197-3200.
- Cartwright, K. (1974). Tracing shallow groundwater systems by soil temperatures. *Water Resources Research*, 10(4), 847-855.
- Cartwright, K. (1979). Measurement of fluid velocity using temperature profiles: experimental verification. *Journal of Hydrology*, 43(1-4), 185-194.
- Cartwright, K. (1979). Measurement of fluid velocity using temperature profiles: experimental verification. *Journal of Hydrology*, 43(1-4), 185-194.
- Chapman, D. S. (1995). Climate change inferred from borehole temperatures: An overview. *IUGG, XXI. General Assembly A*, 286.
- Chapman, D. S., Clement, M. D., & Mase, C. W. (1981). Thermal regime of the Escalante Desert, Utah, with an analysis of the Newcastle geothermal system. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 86(B12), 11735-11746.
- Chapman, D. S., Howell, J., & Sass, J. H. (1984). A note on drillhole depths required for reliable heat flow determinations. *Tectonophysics*, 103(1-4), 11-18.
- Chapuis, R. P., & Gill, D. E. (1989). Hydraulic anisotropy of homogeneous soils and rocks: influence of the densification process. *Bulletin of the International Association of Engineering Geology-Bulletin de l'Association Internationale de Géologie de l'Ingénieur*, 39(1), 75-86.
- Chase, C. A., & O'Dell, P. M. (1973). Application of variational principles to cap and base rock heat losses. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 13(04), 200-210.
- Childs, E. C., Collis-George, N., & Holmes, J. W. (1957). Permeability measurements in the field as an assessment of anisotropy and structure development. *Journal of Soil Science*, 8(1), 27-41.
- Collings, M. R. (1969). Temperature analysis of a stream. *Geological Survey research*, B174-B179.
- Collings, M. R. (1973). *Generalization of stream-temperature data in Washington* (No. 2029-B). US Govt. Print. Off.
- Conant Jr, B. (2004). Delineating and quantifying ground water discharge zones using streambed temperatures. *Groundwater*, 42(2), 243-257.

Referencias bibliográficas

- Conant Jr, B., Cherry, J. A., & Gillham, R. W. (2004). A PCE groundwater plume discharging to a river: influence of the streambed and near-river zone on contaminant distributions. *Journal of Contaminant Hydrology*, 73(1-4), 249-279.
- Conant, B. J. (2002). A PCE plume discharging to a river: Investigations of flux, geochemistry, and biodegradation in the streambed.
- Constantz, J. (2008). Heat as a tracer to determine streambed water exchanges. *Water Resources Research*, 44(4).
- Constantz, J., & Murphy, F. (1991). The temperature dependence of ponded infiltration under isothermal conditions. *Journal of Hydrology*, 122(1-4), 119-128.
- Constantz, J., & Stonestrom, D. A. (2003). Heat as a tracer of water movement near streams. *US Geological Survey Circular*, (1260), 1-96.
- Constantz, J., Cox, M. H., & Su, G. W. (2003). Comparison of heat and bromide as ground water tracers near streams. *Groundwater*, 41(5), 647-656.
- Constantz, J., Stewart, A. E., Niswonger, R., & Sarma, L. (2002). Analysis of temperature profiles for investigating stream losses beneath ephemeral channels. *Water Resources Research*, 38(12), 52-1.
- Cox, M. H., Su, G. W., & Constantz, J. (2007). Heat, chloride, and specific conductance as ground water tracers near streams. *Groundwater*, 45(2), 187-195.
- De Vries, D. A. (1958). Simultaneous transfer of heat and moisture in porous media. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 39(5), 909-916.
- Domenico, P. A., & Palciauskas, V. V. (1973). Theoretical analysis of forced convective heat transfer in regional ground-water flow. *Geological Society of America Bulletin*, 84(12), 3803-3814.
- Duque, C., Calvache, M. L., & Engesgaard, P. (2010). Investigating river-aquifer relations using water temperature in an anthropized environment (Motril-Salobreña aquifer). *Journal of Hydrology*, 381(1-2), 121-133.
- Duque, C., Müller, S., Sebok, E., Haider, K., & Engesgaard, P. (2016). Estimating groundwater discharge to surface waters using heat as a tracer in low flux environments: The role of thermal conductivity. *Hydrological Processes*, 30(3), 383-395.

- Essaid, H. I., Zamora, C. M., McCarthy, K. A., Vogel, J. R., & Wilson, J. T. (2008). Using heat to characterize streambed water flux variability in four stream reaches. *Journal of environmental quality*, 37(3), 1010-1023.
- Estrella, T. R. (2003). SITUACIÓN DE LA INTRUSIÓN MARINA EN LA CUENCA DEL SEGURA: EVOLUCIÓN DESDE EL TIAC'88.
- European Commissions (2000). Directive 2000/60/EC of the European Parliament and of the Council establishing a framework for Community action in the field of water policy. *Official Journal of the European Community L327*, 1-72
- Fanelli, R. M., & Lautz, L. K. (2008). Patterns of water, heat, and solute flux through streambeds around small dams. *Groundwater*, 46(5), 671-687.
- Ferguson, G., & Woodbury, A. D. (2005). The effects of climatic variability on estimates of recharge from temperature profiles. *Groundwater*, 43(6), 837-842.
- Ferguson, S., Woodbury, A. D., & Matile, G. L. (2003). Estimating deep recharge rates beneath an interlobate moraine using temperature logs. *Groundwater*, 41(5), 640-646.
- Flint, A. L., Flint, L. E., Hevesi, J. A., D'Agnesse, F., & Faunt, C. (2000). Estimation of regional recharge and travel time through the unsaturated zone in arid climates. *Washington DC American Geophysical Union Geophysical Monograph Series*, 122, 115-128.
- Frolov, N. M. (1968). *Gidrogeotermija: Hidrogeotermičeskij režim verchnich častej zemnoj kory i gidrogeotermičeskie metody issledovanij*. Izd." Nedra".
- García-Pintado, J., Martínez-Mena, M., Barberá, G. G., Albaladejo, J., & Castillo, V. M. (2007). Anthropogenic nutrient sources and loads from a Mediterranean catchment into a coastal lagoon: Mar Menor, Spain. *Science of the total environment*, 373(1), 220-239.
- García-Ros, G., Alhama, I., & Cánovas, M. (2018). Use of discriminated nondimensionalization in the search of universal solutions for 2-D rectangular and cylindrical consolidation problems. *Open Geosciences*, 10(1), 209-221.
- Garg, S. K., & Kassoy, D. R. (1981). Convective Heat and Mass Transfer in Hydrothermal Systems, Geothermal Systems: Principles and Case Histories edited by L. Rybach and LJP Muffler. *John Wiley & Sons*, 37, 76.
- Gilroy, E. J., & Steele, T. D. (1972). AN ANALYSIS OF SAMPLING-FREQUENCY ALTERNATIVES FOR FITTING A DAILY STREAM-TEMPERATURE MODEL.

Referencias bibliográficas

- Gooseff, M. N., Anderson, J. K., Wondzell, S. M., LaNier, J., & Haggerty, R. (2006). A modelling study of hyporheic exchange pattern and the sequence, size, and spacing of stream bedforms in mountain stream networks, Oregon, USA. *Hydrological Processes: An International Journal*, 20(11), 2443-2457.
- Goto, S., Yamano, M., & Kinoshita, M. (2005). Thermal response of sediment with vertical fluid flow to periodic temperature variation at the surface. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 110(B1).
- Guo, W., & Langevin, C. D. (2002). *User's guide to SEAWAT; a computer program for simulation of three-dimensional variable-density ground-water flow* (No. 06-A7).
- Harvey, J. W., & Wagner B. J. (2000). Quantifying hydrologic interactions between streams and their subsurface hyporheic zones, *Streams and Ground Waters*, 3-44.
- Hatch, C.E., Fisher, A.T., Revenaugh, J.S., Constantz, J. and Ruehl, C. (2006). Quantifying surface water-ground water interactions using time series analysis of streambed thermal records: method development. *Water Resour. Res.*, 42(10): W10410
- Healy, R. W. (1990). *Simulation of Solute Transport Invariably Saturated Porous Media with Supplemental Information on Modifications to the US Geological Survey's Computer Program VS2D* (Vol. 90, No. 4025). Department of the Interior, US Geological Survey.
- Hedin, L. O., Von Fischer, J. C., Ostrom, N. E., Kennedy, B. P., Brown, M. G., & Robertson, G. P. (1998). Thermodynamic constraints on nitrogen transformations and other biogeochemical processes at soil-stream interfaces. *Ecology*, 79(2), 684-703.
- Hill, M. C., Banta, E. R., Harbaugh, A. W., & Anderman, E. R. (2000). *MODFLOW-2000, the US Geological Survey modular ground-water model; user guide to the observation, sensitivity, and parameter-estimation processes and three post-processing programs* (No. 2000-184, pp. 1-209). US Geological Survey.
- Holzbecher, E. (2005). Inversion of temperature time series from near-surface porous sediments. *Journal of Geophysics and Engineering*, 2(4), 343-348.
- Horno Montijano, J. (2002). *Network simulation method*. Research Signpost.
- Hunt, R. J., Krabbenhoft, D. P., & Anderson, M. P. (1996). Groundwater inflow measurements in wetland systems. *Water Resources Research*, 32(3), 495-507.
- Huntley, H. E. (1952). *Dimensional Analysis*, MacDonald & Co. LTD, London.

Referencias bibliográficas

- IGME (1974) Mapa Geológico y Memoria Explicativa de la Hoja 1:50.000 de Llano del Beal, p. 16
- ITGE (1994) Las aguas subterráneas del campo de Cartagena (Murcia). MINER, p. 72
- Izbicki, J. A., & Michel, R. L. (2002). Use of temperature data to estimate infiltration from intermittent streams in the western Mojave Desert, USA. *Recharge Processes, Intern. Hydrol. Soc. Proceedings. [CD-ROM] Adelaide, Australia. Int. Assoc. of Hydrology, Palmerston, Australia.*
- Izbicki, J. A., Michel, R. L., & Martin, P. (1998). Chloride and tritium concentrations in a thick unsaturated zone underlying an intermittent stream in the Mojave Desert, southern California, USA. In *XXVIII Congress of the International Association of Hydrogeologists and the Annual Meeting of the American Institute of Hydrologists* (pp. 81-88).
- Izbicki, J. A., Radyk, J., & Michel, R. L. (2000). Water movement through a thick unsaturated zone underlying an intermittent stream in the western Mojave Desert, southern California, USA. *Journal of Hydrology*, 238(3-4), 194-217.
- Jessop, A. M., & Vigrass, L. W. (1989). Geothermal measurements in a deep well at Regina, Saskatchewan. *Journal of volcanology and geothermal research*, 37(2), 151-166.
- Jiménez, L. J. L., & Rueda, R. A. (2003). ESTADO DE LA INTRUSIÓN MARINA EN EL CAMPO DE CARTAGENA: EVALUACIÓN PRELIMINAR A PARTIR DE LA COMPOSICIÓN QUÍMICA DEL AGUA SUBTERRÁNEA.
- Kalbus, E., Reinstorf, F., & Schirmer, M. (2006). Measuring methods for groundwater–surface water interactions: a review. *Hydrology and Earth System Sciences*, 10(6), 873-887.
- Kalbus, E., Schmidt, C., Bayer-Raich, M., Leschik, S., Reinstorf, F., Balcke, G. U., & Schirmer, M. (2007). New methodology to investigate potential contaminant mass fluxes at the stream–aquifer interface by combining integral pumping tests and streambed temperatures. *Environmental Pollution*, 148(3), 808-816.
- Kappelmeyer, O. (1957). The use of near surface temperature measurements for discovering anomalies due to causes at depths. *Geophysical Prospecting*, 5(3), 239-258.
- Keery, J., Binley, A., Crook, N., & Smith, J. W. (2007). Temporal and spatial variability of groundwater–surface water fluxes: Development and application of an analytical method using temperature time series. *Journal of Hydrology*, 336(1-2), 1-16.

Referencias bibliográficas

- Keery, J., Binley, A., Crook, N., & Smith, J. W. (2007). Temporal and spatial variability of groundwater–surface water fluxes: Development and application of an analytical method using temperature time series. *Journal of Hydrology*, 336(1-2), 1-16.
- Keys, W. S., & Brown, R. F. (1978). The use of temperature logs to trace the movement of injected water. *Groundwater*, 16(1), 32-48.
- Kilty, K., & Chapman, D. S. (1980). Convective heat transfer in selected geologic situations. *Groundwater*, 18(4), 386-394.
- Kulongoski, J. T., & Izbicki, J. A. (2008). Simulation of fluid, heat transport to estimate desert stream infiltration. *Groundwater*, 46(3), 462-474.
- Lachenbruch, A. H., & Marshall, B. V. (1986). Changing climate: geothermal evidence from permafrost in the Alaskan Arctic. *Science*, 234(4777), 689-696.
- Lachenbruch, A. H., & Sass, J. H. (1977). Heat flow in the United States and the thermal regime of the crust. *The Earth's crust*, 20, 626-675.
- Lachenbruch, A. H., Sorey, M. L., Lewis, R. E., & Sass, J. H. (1976). The near-surface hydrothermal regime of Long Valley caldera. *Journal of Geophysical Research*, 81(5), 763-768.
- Lane, A. C. (1923). Geotherms of Lake Superior Copper Country. *Bulletin of the Geological Society of America*, 34(4), 703-720.
- Langevin, C. D., Thorne Jr, D. T., Dausman, A. M., Sukop, M. C., & Guo, W. (2008). *SEAWAT version 4: a computer program for simulation of multi-species solute and heat transport* (No. 6-A22). Geological Survey (US).
- Lapham, W. W. (1989). *Use of temperature profiles beneath streams to determine rates of vertical ground-water flow and vertical hydraulic conductivity* (No. 2337). Dept. of the Interior, US Geological Survey; USGPO; Books and Open-File Reports Section, US Geological Survey [distributor].
- Laursen, A., & Seitzinger, S. (2005). Limitations to measuring riverine denitrification at the whole reach scale: effects of channel geometry, wind velocity, sampling interval, and temperature inputs of N₂-enriched groundwater. *Hydrobiologia*, 545(1), 225-236.
- Lautz, L. K., & Siegel, D. I. (2006). Modeling surface and ground water mixing in the hyporheic zone using MODFLOW and MT3D. *Advances in Water Resources*, 29(11), 1618-1633.

Referencias bibliográficas

- Lee, D. R., & Cherry, J. A. (1979). A field exercise on groundwater flow using seepage meters and mini-piezometers. *Journal of Geological Education*, 27(1), 6-10.
- Lewis, T. J., & Beck, A. E. (1977). Analysis of heat-flow data—detailed observations in many holes in a small area. *Tectonophysics*, 41(1-3), 41-59.
- Lippmann, M. J., Tsang, C. F., & Witherspoon, P. A. (1977, April). Analysis of the response of geothermal reservoirs under injection and production procedures. In *SPE California Regional Meeting*. OnePetro.
- Loheide, S. P., & Gorelick, S. M. (2006). Quantifying stream– aquifer interactions through the analysis of remotely sensed thermographic profiles and in situ temperature histories. *Environmental science & technology*, 40(10), 3336-3341.
- Lu, N., & Ge, S. (1996). Effect of horizontal heat and fluid flow on the vertical temperature distribution in a semiconfining layer. *Water Resources Research*, 32(5), 1449-1453.
- Madrid, C. N., & Alhama, F. (2006). Discrimination: A fundamental and necessary extension of classical dimensional analysis theory. *International communications in heat and mass transfer*, 33(3), 287-294.
- Majorowicz, J. A., & Jessop, A. M. (1981). Regional heat flow patterns in the western Canadian sedimentary basin. *Tectonophysics*, 74(3-4), 209-238.
- Malcolm, I. A., Soulsby, C., Youngson, A. F., & Petry, J. (2003). Heterogeneity in ground water– surface water interactions in the hyporheic zone of a salmonid spawning stream. *Hydrological Processes*, 17(3), 601-617.
- Malcolm, I. A., Soulsby, C., Youngson, A. F., Hannah, D., McLaren, I. S., & Thorne, A. (2002, January). Influence of flow extremes on the hyporheic zone of salmon spawning streams, Water Extremes and Water Stress: Science, Policy and Practice. In *Proceedings of the British Hydrological Society 8th National Symposium*.
- Mansure, A. J., & Reiter, M. (1979). A vertical groundwater movement correction for heat flow. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 84(B7), 3490-3496.
- Manteca Jr, I. A., Meca, A. S., & Alhama, F. (2012). Mathematical characterization of scenarios of fluid flow and solute transport in porous media by discriminated nondimensionalization. *International Journal of Engineering Science*, 50(1), 1-9.

Referencias bibliográficas

- Manteca, I. A., Alcaraz, M., Trigueros, E., & Alhama, F. (2014). Dimensionless characterization of salt intrusion benchmark scenarios in anisotropic media. *Applied mathematics and computation*, 247, 1173-1182.
- Marín, F., Alhama, F., Meroño, P. A., & Moreno, J. A. (2016). Modelling of stick–slip behaviour in a Girling brake using network simulation method. *Nonlinear Dynamics*, 84(1), 153-162.
- Martínez Moreno, M. (2021). *Characterization and numerical verification of seepage scenarios in anisotropic soils under retaining structures and in unconfined aquifers due to pumping wells*. (PhD). Universidad Politécnica de Cartagena.
- McCord, J. T., Gotway, C. A., & Conrad, S. H. (1997). Impact of geologic heterogeneity on recharge estimation using environmental tracers: Numerical modeling investigation. *Water Resources Research*, 33(6), 1229-1240.
- McCord, J., Reiter, M., & Phillips, F. (1992). Heat-flow data suggest large ground-water fluxes through Fruitland coals of the northern San Juan basin, Colorado-New Mexico. *Geology*, 20(5), 419-422.
- Melville, J. G., Molz, F. J., & Güven, O. (1985). Laboratory investigation and analysis of a ground-water flowmeter. *Groundwater*, 23(4), 486-495.
- Mifflin, M. D. (1968). *Delineation of ground-water flow systems in Nevada* (Doctoral dissertation, University of Nevada, Reno).
- Mihevc, T., Pohll, G., Niswonger, R., & Stevick, E. (2002). Truckee canal seepage analysis in the Fernley/Wadsworth area. *Division of Hydrologic Sciences Report*, 41176.
- Milly, P. C. D. (1982). Moisture and heat transport in hysteretic, inhomogeneous porous media: A matric head-based formulation and a numerical model. *Water Resources Research*, 18(3), 489-498.
- Ministerio de Medio Ambiente (2006), Informe de sostenibilidad ambiental del Plan Especial de Actuación en situaciones de alerta y eventual sequía en la Cuenca Hidrográfica del Segura.
- Morgan, P., Harder, V., Swanberg, C. A., Daggett, P. H., Ruscetta, C. A., & Foley, D. (1981). *Groundwater convection model for Rio Grande rift geothermal resources* (No. DOE/ID/12079-39; ESL-59; CONF-8105132-17).
- Nagel, L. W. (1975). SPICE2: A computer program to simulate semiconductor circuits. *Ph. D. dissertation, University of California at Berkeley*.

Referencias bibliográficas

- Ngspice. (2016). Open Source Mixed Mode, Mixed Level Circuit Simulator (based on Bekeley's Spice3f5). <http://ngspice.sourceforge.net/>
- Packman, A. I., & Bencala, K. E. (2000). Modeling surface-subsurface hydrological interactions.
- Palacios, J. (1955). *Análisis dimensional*. Espasa-Calpe.
- Palacios, J. F. (1964). *Dimensional Analysis*. MacMillan & Co. Ltd. New York. St Martin's Press.
- Parsons, M. L. (1970). Groundwater thermal regime in a glacial complex. *Water Resources Research*, 6(6), 1701-1720.
- Pinder, G. F. (1979). State-of-the-art review of geothermal reservoir modelling.
- Podolsky, B. (1951). A problem in heat conduction. *Journal of Applied Physics*, 22(5), 581-585.
- Pollack, H. N., & Chapman, D. S. (1993). Underground records of changing climate. *Scientific American*, 268(6), 44-50.
- PSPICE, versión 6.0 (1994). Microsim Corporation, 20 Fairbanks, Irvine, California 92718.
- Reiter, M. (2001). Using precision temperature logs to estimate horizontal and vertical groundwater flow components. *Water Resources Research*, 37(3), 663-674.
- Reiter, M., & Mansure, A. J. (1983). Geothermal studies in the San Juan Basin and the Four Corners area of the Colorado Plateau I. Terrestrial heat-flow measurements. *Tectonophysics*, 91(3-4), 233-251.
- Reiter, M., Costain, J. K., & Minier, J. (1989). Heat flow data and vertical groundwater movement, examples from southwestern Virginia. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 94(B9), 12423-12431.
- Reiter, M., Mansure, A. J., & Shearer, C. (1979). Geothermal Characteristics of the Rio Grande Rift within the Southern Rocky Mountain Complex. *Rio Grande Rift: Tectonics and Magmatism*, 14, 253-268.
- Ren, T., Kluitenberg, G. J., & Horton, R. (2000). Determining soil water flux and pore water velocity by a heat pulse technique. *Soil Science Society of America Journal*, 64(2), 552-560.
- Rey, J., Martínez, J., Barberá, G. G., García-Aróstegui, J. L., García-Pintado, J., & Martínez-Vicente, D. (2013). Geophysical characterization of the complex dynamics of groundwater and seawater exchange in a highly stressed aquifer system linked to a coastal lagoon (SE Spain). *Environmental earth sciences*, 70(5), 2271-2282.

Referencias bibliográficas

- Ronan, A. D., Prudic, D. E., Thodal, C. E., & Constantz, J. (1998). Field study and simulation of diurnal temperature effects on infiltration and variably saturated flow beneath an ephemeral stream. *Water resources research*, 34(9), 2137-2153.
- Sakura, Y. (1977). The method for estimations of the groundwater velocity from temperature distributions: on the groundwater around Sapporo. *Japan. Stud Water Temp*, 21, 2-14.
- Sakura, Y. (1978). Study on groundwater cycle using water temperature. *Water balance in Japan*, 211-303.
- Sakura, Y. (1984). Change of thermal regime in surface soil layer during a heavy rain. *Geogr. Rev. Jpn*, 57, 628-638.
- Sánchez-Pérez, J. F., & Alhama, I. (2020). Simultaneous determination of initial porosity and diffusivity of water-saturated reinforced concrete subject to chloride penetration by inverse problem. *Construction and Building Materials*, 259, 120412.
- Scanlon, B. R. (1994). Water and heat fluxes in desert soils: 1. Field studies. *Water Resources Research*, 30(3), 709-719.
- Schmidt, C., Bayer-Raich, M., & Schirmer, M. (2006). Characterization of spatial heterogeneity of groundwater-stream water interactions using multiple depth streambed temperature measurements at the reach scale. *Hydrology and Earth System Sciences*, 10(6), 849-859.
- Schmidt, C., Conant Jr, B., Bayer-Raich, M., & Schirmer, M. (2007). Evaluation and field-scale application of an analytical method to quantify groundwater discharge using mapped streambed temperatures. *Journal of Hydrology*, 347(3-4), 292-307.
- Schneider, R. (1964). Relation of temperature distribution to ground-water movement in carbonate rocks of central Israel. *Geological Society of America Bulletin*, 75(3), 209-216.
- Seco-Nicolás, M., Alarcón, M., & Alhama, F. (2018). Thermal behavior of fluid within pipes based on discriminated dimensional analysis. An improved approach to universal curves. *Applied Thermal Engineering*, 131, 54-69.
- Shampine, W. J. (1977). *Indiana stream-temperature characteristics* (No. 76). Department of the Interior, Geological Survey, Water Resources Division.
- Shearer, C., & Reiter, M. (1981). Terrestrial heat flow in Arizona. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 86(B7), 6249-6260.

Referencias bibliográficas

- Silliman, S. E., & Booth, D. F. (1993). Analysis of time-series measurements of sediment temperature for identification of gaining vs. losing portions of Juday Creek, Indiana. *Journal of Hydrology*, 146, 131-148.
- Silliman, S. E., Ramirez, J., & McCabe, R. L. (1995). Quantifying downflow through creek sediments using temperature time series: one-dimensional solution incorporating measured surface temperature. *Journal of Hydrology*, 167(1-4), 99-119.
- Slattery, J. C. (1972). Momentum, energy, and mass transfer in continua. *McGraw-Hill chemical engineering serie*.
- Smith, L., & Chapman, D. S. (1983). On the thermal effects of groundwater flow: 1. Regional scale systems. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 88(B1), 593-608.
- Sorey, M. (1976). *A model of the hydrothermal system of Long Valley Caldera, California* (No. SGP-TR-20-43). US Geological Survey, Water Resources Division, Menlo Park, CA.
- Sorey, M. L. (1971). Measurement of vertical groundwater velocity from temperature profiles in wells. *Water Resources Research*, 7(4), 963-970.
- Stallman, R. W. (1963). Computation of ground-water velocity from temperature data. *USGS water supply paper*, 1544, 36-46.
- Stallman, R. W. (1965). Steady one-dimensional fluid flow in a semi-infinite porous medium with sinusoidal surface temperature. *Journal of geophysical Research*, 70(12), 2821-2827.
- Stallman, R. W. (1967). Flow in the zone of aeration. In *Advances in Hydrosience* (Vol. 4, pp. 151-195). Elsevier.
- Stonestrom, D. A., & Constantz, J. (Eds.). (2003). *Heat as a tool for studying the movement of ground water near streams* (Vol. 1260). US Department of the Interior, US Geological Survey.
- Storey, R. G., Howard, K. W., & Williams, D. D. (2003). Factors controlling riffle-scale hyporheic exchange flows and their seasonal changes in a gaining stream: A three-dimensional groundwater flow model. *Water Resources Research*, 39(2).
- Su, G. W., Jasperse, J., Seymour, D., & Constantz, J. (2004). Estimation of hydraulic conductivity in an alluvial system using temperatures. *Ground Water*, 42(6/7), 890.
- Suzuki, S. (1960). Percolation measurements based on heat flow through soil with special reference to paddy field. *Journal of Geophysical Research*, 65(9), 2883-2885.

Referencias bibliográficas

- Szirtes, T. (2007). *Applied dimensional analysis and modeling*. Butterworth-Heinemann.
- Szymkiewicz, A., Tisler, W., & Burzyński, K. (2015). Examples of numerical simulations of two-dimensional unsaturated flow with VS2DI code using different interblock conductivity averaging schemes.
- Tabbagh, A., Bendjoudi, H., & Benderitter, Y. (1999). Determination of recharge in unsaturated soils using temperature monitoring. *Water Resources Research*, 35(8), 2439-2446.
- Taniguchi, M. (1993). Evaluation of vertical groundwater fluxes and thermal properties of aquifers based on transient temperature-depth profiles. *Water Resources Research*, 29(7), 2021-2026.
- Taniguchi, M., & Sharma, M. L. (1993). Determination of groundwater recharge using the change in soil temperature. *Journal of Hydrology*, 148(1-4), 219-229.
- Taniguchi, M., Shimada, J., Tanaka, T., Kayane, I., Sakura, Y., Shimano, Y., ... & Kawashima, S. (1999). Disturbances of temperature-depth profiles due to surface climate change and subsurface water flow: 1. An effect of linear increase in surface temperature caused by global warming and urbanization in the Tokyo Metropolitan Area, Japan. *Water Resources Research*, 35(5), 1507-1517.
- Tasker, G. D., & Burns, A. W. (1974). MATHEMATICAL GENERALIZATION OF STREAM TEMPERATURE IN CENTRAL NEW ENGLAND 1. *JAWRA Journal of the American Water Resources Association*, 10(6), 1133-1142.
- Tsang, Y. W., & Witherspoon, P. A. (1981). Hydromechanical behavior of a deformable rock fracture subject to normal stress. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 86(B10), 9287-9298.
- Turcotte, D. L., & Schubert, G. (1982). *Geodynamics: Applications of continuum physics to geological problems* John Wiley. New York.
- USEPA (2000). In: Proceedings of the ground water/surface water interactions workshop. Environmental Protection Agency, Office of Solid Waste and Emergency Response. EPA/542/R-00/007
- Van Orstrand, C.E. (1934). Temperature gradients in problems of petroleum geology. *American Associations of Petroleum Geologists*, 889-1021.

Referencias bibliográficas

- Wang, Q., Ochsner, T. E., & Horton, R. (2002). Mathematical analysis of heat pulse signals for soil water flux determination. *Water resources research*, 38(6), 27-1.
- Wankiewicz, A. (1984). Hydrothermal processes beneath arctic river channels. *Water Resources Research*, 20(10), 1417-1426.
- Ward, J. C. (1963). Annual variation of stream water temperature. *Journal of the Sanitary Engineering Division*, 89(6), 1-16.
- Weeks, E. P. (2006). RW Stallman (1924-1977)—An Underappreciated Contributor to Hydrogeology. *Groundwater*, 44(4), 618-621.
- Wierenga, P. J., Hagan, R. M., & Nielsen, D. R. (1970). Soil temperature profiles during infiltration and redistribution of cool and warm irrigation water. *Water Resources Research*, 6(1), 230-238.
- Winter, T. C. (1999). *Ground water and surface water: a single resource* (Vol. 1139). Diane Publishing.
- Woessner, W. W. (2000). Stream and fluvial plain ground water interactions: rescaling hydrogeologic thought. *Groundwater*, 38(3), 423-429.
- Woodbury, A. D., & Smith, L. (1985). On the thermal effects of three-dimensional groundwater flow. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 90(B1), 759-767.
- Wooding, R. (1957). Steady state free thermal convection of liquid in a saturated permeable medium. *Journal of Fluid Mechanics*, 2(3), 273-285.
- Ziagos, J. P., & Blackwell, D. D. (1981). Model for the effect of horizontal fluid flow in a thin aquifer on temperature-depth profiles. *Trans. -Geotherm. Resour. Counc.; (United States)*, 5(CONF-811015-).
- Ziagos, J. P., & Blackwell, D. D. (1986). A model for the transient temperature effects of horizontal fluid flow in geothermal systems. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 27(3-4), 371-397.
- Zueco, J. (2015). *Solución numérica de problemas de fenómenos de transporte aplicando analogía eléctrica y Pspice*. (PhD). Universidad Politécnica de Cartagena.